FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

ÉPREUVE SEMESTRIELLE

UNITÉ : PHYSIQUE STATISTIQUE

DURÉE : 02 HEURES.

EXERCICE 01: (07 *points*)

Dans le cas d'un gaz parfait la probabilité pour qu'une particule ai une vitesse comprise entre $\vec{v}$ et $\vec{v}+d\vec{v}$ est donnée par :

$$dP(\vec{v}) = A.\exp\left(-\frac{E_c}{k_B T}\right).d^3v$$

Tel que $f(\vec{v}) = A.\exp(-E_c/k_B T)$ est la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann.

E_c est l'énergie cinétique de la particule et k_B la constante de Boltzmann.

1. Calculer A pour que $f(\vec{v})$ soit normée.
2. A partir de la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann des gaz parfait, calculer la fonction de distribution $\tilde{f}(v)$ du module de la vitesse.
3. Pour quelle valeur de la vitesse, notée v_m, cette fonction est elle maximale. (Cette vitesse est aussi appelée vitesse thermique $v_m = v_{th}$).
4. Trouver la vitesse quadratique moyenne $v^* = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$.
5. Calculer la valeur moyenne du module de la vitesse $\langle v \rangle = \bar{v}$.
6. Montrer qu'à une température donnée, on a $v_m \le \bar{v} \le v^*$.

On donne : $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2).dx = \sqrt{\pi}$

EXERCICE 02: (13 *points*)

La chaleur spécifique du composé Fe_2VAl a été mesurée en présence d'un champ magnétique, elle représenté à basses températures dans la figure 1.

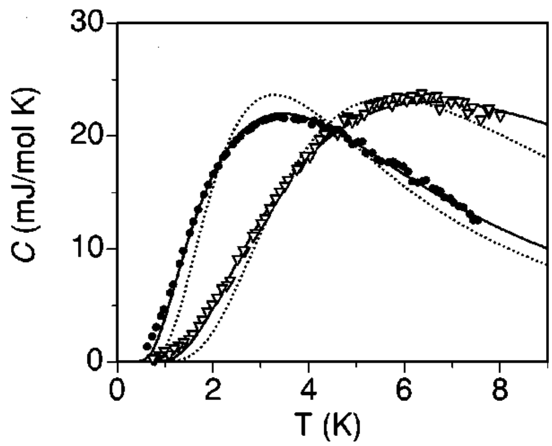

Figure 1 : *Chaleur spécifique du composé* Fe_2VAl *à basses températures dans un champ magnétique* $B = 4$ *Tesla (cercles) et* $B = 8$ *Tesla (triangles), comparée au modèle à deux niveaux (pointillés avec* $\epsilon = 1{,}1\mu_B.B$*) et au modèle à* n *niveaux (traits pleins avec* $\epsilon = 1{,}93\mu_B.B$ *et* $n = 3$*). (D'après Physical Review B,* ***60****, R13941, (1999)).*

Les chercheurs qui ont effectués ces mesures ont tenté de les interpréter par la présence de défauts magnétiques dans la structure en utilisant deux modèles différents.

MODÉLISATION A 2 NIVEAUX

Dans cette approche, on considère que les défauts sont indépendants (sans interaction), localisés spatialement (discernables), et qu'ils ne peuvent se trouver que dans deux états d'énergie que l'on note ϵ_0 et ϵ_1 ($\epsilon_1 > \epsilon_0$). Le composé est maintenu à la température T.

En posant $\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_0$.

1. Calculer la fonction de partition canonique z d'un seul défaut en fonction de ϵ_0, ϵ et de $\beta = 1/k_B T$.
2. Exprimer la fonction de partition canonique Z correspondant à N défauts.
3. Calculer l'énergie interne du système U.
4. A partir de 2. déduire que l'énergie libre F du système de N défauts s'écrit :
$$F = N\epsilon_0 - Nk_B T.ln\left(1 + e^{-\beta\epsilon}\right)$$
5. En déduire l'entropie du système S.
6. Retrouver l'expression de l'énergie interne à partir de F et de S.
7. A partir de l'expression de l'énergie U discuter physiquement les occupations des niveaux ϵ_0 et ϵ_1 dans les cas où $T \to 0$ et $T \to \infty$.
8. Montrer que la chaleur spécifique à volume constant C_V s'écrit :
$$C_V = Nk_B\left(\frac{\beta\epsilon}{2}\right)^2 \frac{1}{\mathrm{ch}^2(\beta\epsilon/2)}$$

MODELISATION A n NIVEAUX

Sous les mêmes hypothèses d'indépendance et de localisation, on suppose maintenant que les défauts magnétiques peuvent occuper n états d'énergie notés ϵ_0, ϵ_1, … , ϵ_n. En plus, on supposera que ces niveaux d'énergies sont équidistants $\epsilon_p = \epsilon_0 + p.\epsilon$ avec $p = 0, \dots, n$ (ϵ est l'écart entre deux niveaux successifs).

1. Calculer la fonction de partition z d'un seul défaut. On utilise : $1 + x + \dots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.
2. Montrer que l'énergie libre f associée à un seul défaut peut s'écrire :
$$\beta.f = \beta\left(\epsilon_0 + \frac{n\epsilon}{2}\right) - ln\left[\mathrm{sh}\left((n+1)\frac{\beta\epsilon}{2}\right)\right] + ln\left[\mathrm{sh}\left(\frac{\beta\epsilon}{2}\right)\right]$$
3. Calculer l'énergie interne U du système.
4. Des deux questions précédentes calculer l'entropie S du système.
5. Montrer que la chaleur spécifique à volume constant est donnée C_V par l'expression :
$$C_V = -k_B\beta^2 \frac{\partial U}{\partial \beta}$$
6. Calculer C_V en fonction de β de ϵ et de n.