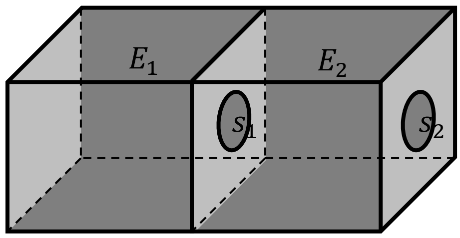
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

ÉPREUVE SEMESTRIELLE

UNITÉ : PHYSIQUE STATISTIQUE
DURÉE : 01 HEURE 30 MINUTES.

EXERCICE 01: (08 *points*)

Une mole de gaz parfait monoatomique est initialement contenue dans une enceinte rigide E_1 de volume V. Par l'intermédiaire d'un petit trou s_1 de section s, l'enceinte E_1 communique avec une autre enceinte E_2 de même volume V et initialement vide. Cette dernière est elle-même ouverte sur le vide grâce à un trou identique s_2. L'ensemble est maintenu à la température T.



1. Donner l'expression de la vitesse quadratique moyenne v^* d'un atome en fonction de la température T, de la masse molaire M du gaz et de la constante R des gaz parfaits.
2. En utilisant la distribution des vitesses de Maxwell-Boltzmann, calculer le nombre des atomes $dN_{1\to 2}$ qui passent de E_1 vers E_2 pendant une durée infinitésimale dt où N_1 est le nombre total d'atomes présent dans l'enceinte E_1.
3. En écrivant $dN_{1\to 2} = \lambda . N_1 . dt$. Donner l'expression de la constante λ. Calculer λ dans le cas de l'Argon de masse molaire $M = 39{,}9\ g.mol^{-1}$ à la température $T = 300\ K$ dans un volume $V = 1\ l$, la section des trous étant $s = 10\ cm^2$.

   Soit N_2 le nombre d'atomes de l'enceinte E_2. Déduire de la question 2. le nombre d'atomes $dN_{2\to 1}$ qui pendant dt passent de E_2 vers E_1 ainsi que le nombre d'atomes $dN_{2\to \text{vide}}$ qui vont dans le vide.
4. Justifier alors que les nombres N_1 et N_2 évoluent au cours du temps selon les équations différentielles suivantes :
$$\frac{dN_1}{dt} + \lambda .(N_1 - N_2) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dN_2}{dt} + \lambda .(2N_2 - N_1) = 0$$
5. Déterminer la valeur du rapport N_1/N_2 lorsque le nombre N_2 d'atomes dans E_2 est maximum ?
6. Reprendre les questions 4. et 5. quand le trou s_2 est fermé.

On donne : $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) . dx = \sqrt{\pi}$

EXERCICE 02: (**12** ***points***)

L'énergie d'un oscillateur harmonique à une dimension en mécanique quantique est donnée par :

$$\epsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad \text{avec} \qquad n = 0,1,2 \ldots$$

ω est la pulsation de l'oscillateur.

On considère un système composé de N oscillateurs harmoniques indépendant mais discernables.

1. Calculer la fonction de partition z d'un oscillateur, puis en déduire la fonction de partition Z du système.
2. Trouver à partir de Z l'énergie libre F et l'énergie interne U du système.
3. En déduire la capacité calorifique à volume constant C_V.

Dans le cas d'un oscillateur harmonique à trois dimensions

$$\epsilon_{n,p,q} = \hbar\omega(n + p + q)$$

n, p, q sont les trois nombres quantiques associés aux trois degrés de vibration. $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$.

4. Exprimer la fonction de partition du cristal Z à l'aide de la fonction de partition z d'une particule dans le cas de particules discernables.
5. Calculer z et montrer que z ne dépende que de $\frac{\theta_E}{T}$ où θ_E est une température caractéristique (dite « température d'Einstein » ou « température de vibration ») que l'on définira.
6. En déduire l'énergie interne U du solide.
7. Quelle est l'énergie moyenne d'une particule lorsque $T \gg \theta_E$?
8. Exprimer la capacité thermique à volume constant $C_V(T)$ que l'on tracera en fonction de la température.
9. Vers quelle valeur tend $C_V(T)$ lorsque $T \gg \theta_E$?
10. Calculer l'énergie libre F du cristal formé par ces N particules.
11. En déduire l'entropie S du système.

On peut utiliser :

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\right)$$