FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

UNITÉ : PHYSIQUE STATISTIQUE

EXERCICE 01: (07 *points*)

1. Vecteur vitesse moyenne.

$$\langle\vec{v}\rangle = \langle v_x\rangle.\vec{e}_x + \langle v_y\rangle.\vec{e}_y + \langle v_z\rangle.\vec{e}_z$$

Calculons $\langle v_x\rangle$:

$$\langle v_x\rangle = \iiint_{-\infty}^{+\infty} v_x.f(\vec{v}).dv_x dv_y dv_z$$

$$\langle v_x\rangle = \left\{\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x.e^{-\frac{\beta m}{2}v_x^2}dv_x\right\}\times\left\{\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_y^2}dv_y\right\} \times\left\{\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_z^2}dv_z\right\}$$

Or la fonction étant normée :

$$\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_y^2}dv_y = \left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_z^2}dv_z = 1$$

Donc

$$\langle v_x\rangle = \left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x.e^{-\frac{\beta m}{2}v_x^2}dv_x = \left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\frac{-1}{\beta m}\left[e^{-\frac{\beta m}{2}v_x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

Et

$$\langle v_x\rangle = 0$$

De la même manière :

$$\langle v_y\rangle = \langle v_z\rangle = 0$$

Donc

$$\boxed{\langle\vec{v}\rangle = \vec{0}}$$

2. L'énergie moyenne d'une particule est égale à son énergie cinétique moyenne. L'énergie interne de N particules est égale à :

$$U = N\langle E_c\rangle = N\left\langle\frac{1}{2}mv^2\right\rangle = N\frac{1}{2}m\{\langle v_x^2\rangle + \langle v_y^2\rangle + \langle v_z^2\rangle\}$$

Calculons $\langle v_x^2\rangle$:

$$\langle v_x^2\rangle = \left\{\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2.e^{-\frac{\beta m}{2}v_x^2}dv_x\right\}\times\left\{\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_y^2}dv_y\right\} \times\left\{\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_z^2}dv_z\right\}$$

Donc

$$\langle v_x^2\rangle = \left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2.e^{-\frac{\beta m}{2}v_x^2}dv_x = \left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{\beta m}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\tau^2.e^{-\tau^2}d\tau$$

Où on a posé :

$$\tau = \left(\frac{\beta m}{2}\right)^{1/2} v_x \quad\Rightarrow\quad d\tau = \left(\frac{\beta m}{2}\right)^{1/2} dv_x \qquad \text{et} \qquad \tau^2 = \left(\frac{\beta m}{2}\right) v_x^2.$$

En intégrant par parties

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\tau^2.e^{-\tau^2}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}\tau\times\left(\tau.e^{-\tau^2}\right)d\tau = \left[\frac{\tau.e^{-\tau^2}}{-2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\tau^2}d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Donc

$$\langle v_x^2 \rangle = \left(\frac{m}{2\pi . k_B T}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{\beta m}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{k_B T}{m}$$

De la même manière :

$$\langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{k_B T}{m}$$

Finalement

$$\boxed{U = N\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} N k_B T}$$

3. Capacité calorifique à volume constant.

$$\boxed{C_V = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_V = \frac{3}{2} N k_B}$$

Pour une mole de particules $N = \mathcal{N}_A$ la capacité calorifique molaire $C_V = \frac{3}{2} R$

4. Pression d'un gaz sur une paroi = la moyenne des chocs des particules de ce gaz avec la paroi.
 Paroi perpendiculaire à l'axe OX: condition pour avoir un choc $v_x \geq 0$.

Quantité de mouvement avant le choc : $m\vec{v} = v_x . \vec{e}_x + v_y . \vec{e}_y + v_z . \vec{e}_z$.

Quantité de mouvement avant le choc : $m\overrightarrow{v'} = -v_x . \vec{e}_x + v_y . \vec{e}_y + v_z . \vec{e}_z$.

Le choc est considéré comme élastique $|\overrightarrow{v'}| = |\vec{v}|$.

La variation de la quantité de mouvement de la particule : $m(\overrightarrow{v'} - \vec{v}) = -2mv_x . \vec{e}_x$

La variation de la quantité de mouvement de la paroi : $2mv_x . \vec{e}_x$ (conservation de la quantité de mouvement).

Dans le cas de n particules par unité de volume $n = N/V$, le nombre de particules incidentes ΔN durant un temps Δt sur une surface ΔS est égal à :

$$\Delta N = n . \Delta\tau = n . \Delta S . v_x \Delta t$$

La quantité de mouvement totale transférée :

$$\Delta\vec{p} = \Delta N \times 2mv_x . \vec{e}_x$$

La force appliquée par les particules sur la surface ΔS :

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = n . \Delta S \times 2mv_x^2 . \vec{e}_x$$

La valeur moyenne de cette force

$$\langle \vec{F} \rangle = n . \Delta S \times 2m \left\{ \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \times f(\vec{v}) . dv_x dv_y dv_z \right\} . \vec{e}_x$$

L'intégrale sur v_x se fait de 0 à $+\infty$, car seules les particules qui ont une vitesse v_x positive peuvent arriver sur la paroi.

$$\int_0^{+\infty} v_x^2 \times f(\vec{v}) . dv_x = \left(\frac{m}{2\pi . k_B T}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} v_x^2 . e^{-\frac{\beta m}{2} v_x^2} dv_x = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2\pi . k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 . e^{-\frac{\beta m}{2} v_x^2} dv_x$$

Car la fonction à intégrer est paire. D'où :

$$\langle \vec{F} \rangle = n . \Delta S \times 2m \frac{1}{2} \langle v_x^2 \rangle . \vec{e}_x$$

Comme $\langle v_x^2 \rangle = k_B T / m$, on a :

$$\langle \vec{F} \rangle = n . \Delta S \times k_B T . \vec{e}_x$$

Finalement, la pression appliquée sur la surface ΔS:

$$P = \frac{\langle F \rangle}{\Delta S} = n k_B T$$

Ou

$$\boxed{P = \frac{N}{V} k_B T}$$

On retrouve l'équation d'état des gaz parfaits.

5. Normalisation de $f(v_x, v_y, v_z, \omega_1, \omega_2)$.

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \iint_{-\infty}^{+\infty} f(v_x, v_y, v_z, \omega_1, \omega_2) \times dv_x dv_y dv_z d\omega_1 d\omega_2 = 1$$

Donc

$$A\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_i^2} dv_i\right)^3 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I}{2}\omega_i^2} d\omega_i\right)^2 = 1$$

En utilisant $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}$.

$$A\left(\sqrt{\frac{2}{\beta m}}\sqrt{\pi}\right)^3 \left(\sqrt{\frac{2}{\beta I}}\sqrt{\pi}\right)^2 = 1$$

Donc

$$\boxed{A = \left(\frac{m}{2\pi. k_B T}\right)^{3/2} \left(\frac{I}{2\pi. k_B T}\right)}$$

6. L'énergie moyenne d'une particule est égale à son énergie cinétique moyenne. L'énergie interne de N particules est égale à :

$$U = N\langle E_c\rangle = N\frac{1}{2}m\{\langle v_x^2\rangle + \langle v_y^2\rangle + \langle v_z^2\rangle\} + N\frac{1}{2}I\{\langle \omega_1^2\rangle + \langle \omega_2^2\rangle\}$$

Calculons $\langle v_x^2\rangle$:

$$\langle v_x^2\rangle = \left\{\left(\frac{m}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2. e^{-\frac{\beta m}{2}v_x^2} dv_x\right\} \times \left\{\left(\frac{m}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_y^2} dv_y\right\} \times \left\{\left(\frac{m}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_z^2} dv_z\right\}$$
$$\times \left\{\left(\frac{I}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I}{2}\omega_1^2} d\omega_1\right\} \times \left\{\left(\frac{I}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I}{2}\omega_2^2} d\omega_2\right\}$$

Donc

$$\langle v_x^2\rangle = \left(\frac{m}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2. e^{-\frac{\beta m}{2}v_x^2} dv_x = \left(\frac{m}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{\beta m}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau^2. e^{-\tau^2} d\tau$$

Comme on a calculé (par parties) $\int_{-\infty}^{+\infty} \tau^2. e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Donc

$$\langle v_x^2\rangle = \left(\frac{m}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{\beta m}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{k_B T}{m}$$

De la même manière :

$$\langle v_y^2\rangle = \langle v_z^2\rangle = \frac{k_B T}{m}$$

Calculons $\langle \omega_1^2\rangle$:

$$\langle \omega_1^2\rangle = \left\{\left(\frac{m}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_x^2} dv_x\right\} \times \left\{\left(\frac{m}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_y^2} dv_y\right\} \times \left\{\left(\frac{m}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_z^2} dv_z\right\}$$
$$\times \left\{\left(\frac{I}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1^2. e^{-\frac{\beta I}{2}\omega_1^2} d\omega_1\right\} \times \left\{\left(\frac{I}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I}{2}\omega_2^2} d\omega_2\right\}$$

Donc

$$\langle \omega_1^2\rangle = \left(\frac{I}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1^2. e^{-\frac{\beta I}{2}\omega_1^2} d\omega_1 = \left(\frac{I}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{\beta I}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau^2. e^{-\tau^2} d\tau$$

Comme on a calculé (par parties) $\int_{-\infty}^{+\infty} \tau^2 . e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Donc

$$\langle \omega_1^2 \rangle = \left(\frac{I}{2\pi . k_B T}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{\beta I}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{k_B T}{I}$$

De la même manière :

$$\langle \omega_2^2 \rangle = \frac{k_B T}{I}$$

Finalement

$$\boxed{U = N \langle E_c \rangle = \frac{5}{2} N k_B T}$$

7. Capacité calorifique à volume constant.

$$\boxed{C_V = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_V = \frac{5}{2} N k_B}$$

Pour une mole de particules $N = \mathcal{N}_A$ la capacité calorifique molaire $C_V = \frac{5}{2} R$

<u>EXERCICE 02:</u> (07 *points*)

$$\epsilon_{n,p,q} = \hbar\omega(n + p + q)$$

1. Puisque toutes les particules sont localisées autours de leurs positons d'équilibre (solide cristallin), donc <u>on peut les distinguer les unes des autres</u> et alors elles sont <u>discernables</u>.
   Dans ce cas : $\boxed{Z = z^N}$

2. Calcul de la fonction de partition canonique z d'une seule particule.

$$\boxed{z = \sum_{n,p,q} e^{-\beta \epsilon_{n,p,q}}}$$

En remplaçant :

$$z = \sum_n \sum_p \sum_q e^{-\beta\hbar\omega(n+p+q)} = \left(\sum_n e^{-\beta\hbar\omega . n}\right)\left(\sum_p e^{-\beta\hbar\omega . p}\right)\left(\sum_q e^{-\beta\hbar\omega . q}\right)$$

Ou bien

$$z = \left(\sum_n \left(e^{-\beta\hbar\omega}\right)^n\right)\left(\sum_p \left(e^{-\beta\hbar\omega}\right)^p\right)\left(\sum_q \left(e^{-\beta\hbar\omega}\right)^q\right)$$

En utilisant la somme d'une suite géométrique $1 + x + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ avec $x = e^{-\beta\hbar\omega}$:

$$z = \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\right)^3$$

Comme la somme se fait sur tous les nombres naturels :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(e^{-\beta\hbar\omega}\right)^{n+1} = e^{-\beta\hbar\omega(n+1)} = 0$$

Donc $$z = \left(\frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\right)^3$$

Ou

$$\boxed{z = \frac{1}{(1 - e^{-\theta_E/T})^3}}$$

Avec $\boxed{\theta_E = \hbar\omega/k_B}$ est une constante appelée température d'Einstein.

3. Energie interne du système U.

$$\boxed{U = -\frac{\partial lnZ}{\partial\beta} = -N\frac{\partial lnz}{\partial\beta}}$$

Comme $lnz = -3.\, ln\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right)$, donc :

$$U = 3N\frac{-(-\hbar\omega)e^{-\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}$$

Et

$$\boxed{U = 3N\hbar\omega\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} = 3Nk_B\frac{\theta_E}{e^{\theta_E/T} - 1}}$$

4. Pour une seule particule $u = 3k_B\frac{\theta_E}{e^{\theta_E/T}-1}$.

Quand $T \gg \theta_E \quad \Rightarrow \quad \theta_E/T \ll 1 \quad \Rightarrow \quad e^{\theta_E/T} \simeq 1 + \theta_E/T$.

Donc

$$\boxed{u = 3k_BT}$$

5. Capacité calorifique à volume constant.

$$C_V = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_V = -3Nk_B\frac{\theta_E\left(-\theta_E/T^2\right)e^{\theta_E/T}}{(e^{\theta_E/T} - 1)^2}$$

Ce qui donne

$$\boxed{C_V = 3Nk_B\left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2\frac{e^{\theta_E/T}}{(e^{\theta_E/T} - 1)^2} = 3Nk_B\left(\frac{\theta_E}{2T}\right)^2\frac{1}{sh^2(\theta_E/2T)}}$$

6. Quand $T \gg \theta_E \quad \Rightarrow \quad \theta_E/2T \ll 1 \quad \Rightarrow \quad sh(\theta_E/2T) \simeq \theta_E/2T$.

Donc

$$\boxed{C_V = 3Nk_B}$$

7. Energie libre F. $\boxed{F = -k_BT.\, lnZ = -Nk_BT.\, lnz}$

Donc

$$\boxed{F = 3Nk_BT.\, ln\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right) = 3Nk_BT.\, ln\left(1 - e^{-\theta_E/T}\right)}$$

8. L'entropie du système S. $F = U - TS \quad \Rightarrow \quad \boxed{S = \frac{U-F}{T}}$

D'où

$$\boxed{S = 3Nk_B\left\{\frac{\theta_E/T}{e^{\theta_E/T} - 1} - ln\left(1 - e^{-\theta_E/T}\right)\right\}}$$

EXERCICE 03: (**06 *points***)

$\epsilon = -\alpha B m_z$ trois états $\begin{cases} m_z = +1 \\ m_z = 0 \\ m_z = -1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ trois énergies possibles $\begin{cases} \epsilon_1 = -\alpha B \\ \epsilon_0 = 0 \\ \epsilon_{-1} = \alpha B \end{cases}$.

1. Dans le cas de N particules, l'état de plus basse énergie est donné par :

$$U_{min} = N.\epsilon_{min} = N.\epsilon_1 = -N\alpha B$$

Dans ce cas tout les moments magnétiques sont alignés dans le sens du champ magnétique extérieur $\vec{B}$ $(m_z = +1)$.

2. Puisque les particules sont discernables $\boxed{Z = z^N}$:

Calculons z :

$$\boxed{z = \sum_n e^{-\beta E_n}}$$

Donc

$$\boxed{z = e^{-\beta\alpha B} + e^0 + e^{+\beta\alpha B} = 1 + 2.\cosh(\beta\alpha B)}$$

Et

$$\boxed{Z = (1 + 2.\cosh(\beta\alpha B))^N}$$

3. Energie interne :

$$\boxed{U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -N\frac{\partial \ln z}{\partial \beta}}$$

Comme $\ln z = \ln(1 + \cosh(\beta\alpha B))$, donc :

$$\boxed{U = -N2\alpha B\frac{\sinh(\beta\alpha B)}{1 + 2.\cosh(\beta\alpha B)}}$$

Calcul de l'aimantation : $\begin{cases} n_1 = le\ nombre\ de\ particules\ d'énergie\ \ \epsilon_1 \\ n_0 = le\ nombre\ de\ particules\ d'énergie\ \ \epsilon_0 \\ n_{-1} = le\ nombre\ de\ particules\ d'énergie\ \ \epsilon_{-1} \end{cases}$

D'où l'énergie du système est égale à :

$$U = \sum n_i.\epsilon_i = n_1.\epsilon_1 + n_0.\epsilon_0 + n_{-1}.\epsilon_{-1}$$

Donc

$$U = n_1.(-\alpha B) + n_0.(0) + n_{-1}.(+\alpha B) = \alpha B.(n_{-1} - n_1)$$

L'aimantation du système :

$$M_z = \sum n_i.m_{zi} = n_1.(+1) + n_0.(0) + n_{-1}.(-1)$$

Donc

$$M_z = (n_1 - n_{-1})$$

En comparant, il vient que :

$$U = -\alpha B.M_z$$

D'où

$$\boxed{M_z = -\frac{U}{\alpha B} = 2N\frac{\sinh(\beta\alpha B)}{1 + 2.\cosh(\beta\alpha B)}}$$

4. Dans le cas où B est petit $\Rightarrow$ $\beta\alpha B = x \ll 1$ $\Rightarrow$ on utilise : $\sinh x \simeq x$ et $\cosh x \simeq 1$.
Dans ce cas :

$$\boxed{M_z = \frac{2}{3} N\beta\alpha B = \chi . B}$$

Avec χ la susceptibilité magnétique.

$$\boxed{\chi = \frac{2}{3}\frac{N\alpha}{k_B T}}$$

Quand $T \to 0$: $\chi \to +\infty$.

5. Energie libre F . $\boxed{F = -k_B T.\ln Z = -Nk_B T.\ln z}$
Donc

$$\boxed{F = -Nk_B T.\ln(1 + 2.\cosh(\beta\alpha B))}$$

L'entropie du système S. $F = U - TS$ $\Rightarrow$ $\boxed{S = \frac{U-F}{T}}$

D'où

$$\boxed{S = Nk_B\left\{\ln(1 + 2.\cosh(\beta\alpha B)) - \frac{2\beta\alpha B \times \sinh(\beta\alpha B)}{1 + 2.\cosh(\beta\alpha B)}\right\}}$$

$T \to \infty$ $\Rightarrow$ $\beta\alpha B = x \ll 1$ $\Rightarrow$ on utilise : $\sinh x \simeq x$ et $\cosh x \simeq 1$.

$$S = Nk_B\left\{ln(3) - \frac{2}{3}(\beta\alpha B)^2\right\}$$

$T \to 0$ $\Rightarrow$ $e^{-\beta\alpha B} \simeq e^{-\infty} \to 0$ $\Rightarrow$ on utilise : $\sinh(\beta\alpha B) \simeq \cosh(\beta\alpha B) \simeq \frac{1}{2}e^{\beta\alpha B} \gg 1$.

$$S \simeq Nk_B\{\beta\alpha B - \beta\alpha B\} = 0$$

$S = 0$ correspond à un état parfaitement ordonné (question 1.).