FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

MODULE : PHYSIQUE STATISTIQUE

EXERCICE 01 : (07 *points*)

1. La fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann pour les gaz parfaits.

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi.k_B T}\right)^{3/2}.\exp\left(-\frac{m}{2.k_B T}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)\right)$$

La fonction de distribution $\tilde{f}(v)$ du module de la vitesse est donnée par la probabilité d'avoir un module de vitesse compris entre v et $v + dv$, c'est-à-dire :

$$dP(v) = \tilde{f}(v).dv$$

Pour obtenir cette probabilité nous intégrons $dP(\vec{v})$ sur toutes les valeurs possibles de θ et de φ en coordonnées sphériques.

$$dP(v) = \int_{\theta,\varphi} dP(\vec{v}) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\vec{v}).v^2.\sin\theta.dv d\theta d\varphi \quad \text{avec} \quad d^3v = v^2.\sin\theta.dv d\theta d\varphi$$

D'où

$$\boxed{\tilde{f}(v) = 4\pi.v^2.f(\vec{v}) = 4\pi.v^2.\left(\frac{m}{2\pi.k_B T}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m.v^2}{2.k_B T}\right)}$$

2. Calcul de v_m.

$$\tilde{f}(v_m) = \left[\tilde{f}(v)\right]_{\max} \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{d\tilde{f}(v)}{dv}\right|_{v=v_m} = 0$$

Donc

$$4\pi.\left(\frac{m}{2\pi.k_B T}\right)^{3/2}\left\{2v.\exp\left(-\frac{m.v^2}{2.k_B T}\right) - \frac{m}{k_B T}v^3\exp\left(-\frac{m.v^2}{2.k_B T}\right)\right\} = 0$$

Et

$$\boxed{v_m = \sqrt{2}.\sqrt{\frac{k_B T}{m}}}$$

3. Calcul de la vitesse quadratique moyenne $v^* = \sqrt{\langle v^2\rangle}$.

$$\langle v^2\rangle = \int_0^{+\infty} v^2.\tilde{f}(v).dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi.k_B T}\right)^{3/2}\int_0^{+\infty} v^4.e^{-\frac{m.v^2}{2.k_B T}}dv$$

En intégrant par parties ; $\left(g = v^3, h' = v.e^{-\frac{m.v^2}{2.k_B T}}\right)$ et $\left(g' = 3v^2, h = -\frac{k_B T}{m}.e^{-\frac{m.v^2}{2.k_B T}}\right)$ on trouve :

$$\langle v^2\rangle = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi.k_B T}\right)^{3/2}\left\{\left[-\frac{k_B T}{m}.v^3 e^{-\frac{m.v^2}{2.k_B T}}\right]_0^{+\infty} + \frac{3k_B T}{m}\int_0^{+\infty} v^2.e^{-\frac{m.v^2}{2.k_B T}}dv\right\}$$

Le premier terme étant nul en 0 à cause de v^3 et nul à l'infini à cause de $e^{-\frac{m.v^2}{2.k_B T}}$, on a :

$$\langle v^2\rangle = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi.k_B T}\right)^{3/2}\frac{3k_B T}{m}\int_0^{+\infty} v^2.e^{-\frac{m.v^2}{2.k_B T}}dv$$

Comme la distribution est normée $4\pi\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2}\int_0^{+\infty} v^2.e^{-\frac{m.v^2}{2.k_BT}}dv = 1$, alors :

$$\langle v^2\rangle = \frac{3.k_BT}{m} \qquad \text{et} \qquad \boxed{v^* = \sqrt{\langle v^2\rangle} = \sqrt{3}.\sqrt{\frac{k_BT}{m}}}$$

4. Calcul de la valeur moyenne du module de la vitesse $\langle v\rangle = \bar{v}$.

$$\langle v\rangle = \int_0^{+\infty} v.\tilde{f}(v).dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2}\int_0^{+\infty} v^3.e^{-\frac{m.v^2}{2.k_BT}}dv$$

En intégrant par parties ; $\left(g = v^2, h' = v.e^{-\frac{m.v^2}{2.k_BT}}\right)$ et $\left(g' = 2v, h = -\frac{k_BT}{m}.e^{-\frac{m.v^2}{2.k_BT}}\right)$ on trouve :

$$\langle v^2\rangle = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2}\left\{\left[-\frac{k_BT}{m}.v^2e^{-\frac{m.v^2}{2.k_BT}}\right]_0^{+\infty} + \frac{2k_BT}{m}\int_0^{+\infty} v.e^{-\frac{m.v^2}{2.k_BT}}dv\right\}$$

Le premier terme étant nul en 0 à cause de v^2 et nul à l'infini à cause de $e^{-\frac{m.v^2}{2.k_BT}}$, on a :

$$\langle v^2\rangle = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2}\frac{2k_BT}{m}\int_0^{+\infty} v.e^{-\frac{m.v^2}{2.k_BT}}dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2}\frac{2k_BT}{m}\left[-\frac{k_BT}{m}e^{-\frac{m.v^2}{2.k_BT}}\right]_0^{+\infty}$$

Finalement :

$$\boxed{\bar{v} = \langle v\rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi}}.\sqrt{\frac{k_BT}{m}}}$$

5. $\begin{cases} v_m = \sqrt{2}.\sqrt{k_BT/m} = 1{,}41\sqrt{k_BT/m} \\ v^* = \sqrt{3}.\sqrt{k_BT/m} = 1{,}72\sqrt{k_BT/m} \\ \bar{v} = \sqrt{8/\pi}.\sqrt{k_BT/m} = 1{,}59\sqrt{k_BT/m} \end{cases}$ donc à T donné $\boxed{v_m \leq \bar{v} \leq v^*}$.

EXERCICE 02 : (**07** ***points***)

1.

$$\boxed{G = H - T.S = U + p.V - T.S}$$

Donc

$$dG = dU + p.dV + V.dp - T.dS - S.dT$$

Or

$$dU = \delta Q + \delta W = T.dS - p.dV$$

D'où

$$\boxed{dG = V.dp - S.dT}$$

2.

$$dU = T.dS - p.dV \qquad \Rightarrow \qquad dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV$$

Pour une (01) mole de gaz parfait

$$dU = n.C_V.dT = C_V.dT$$

Donc

$$dS = \frac{C_V}{T}dT + \frac{p}{T}dV$$

En utilisant l'équation d'état des gaz parfaits $p.V = R.T$

$$\boxed{dS = \frac{C_V}{T}dT + \frac{R}{V}dV}$$

D'autre part

$$dV = \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p dT + \left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_T dp \quad \text{avec} \quad \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p = \frac{R}{p} \quad \text{et} \quad \left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_T = -\frac{R.T}{p^2}$$

Donc

$$dV = \frac{R}{p}dT - \frac{R.T}{p^2}dp$$

En remplaçant

$$dS = \frac{C_V}{T}dT + \frac{R}{V}\frac{R}{p}dT - \frac{R}{V}\frac{R.T}{p^2}dp$$

Finalement

$$\boxed{dS = \frac{C_V + R}{T}dT - \frac{R}{p}dp}$$

3.

Dans le cas d'un gaz parfait, puisque l'énergie interne ne dépend que de la température dU est la même dans le cas d'une transformation à pression constante ou à volume constant pourvu que l'augmentation de la température soit égale (partant de la même température).

$$dU = n.C_V.dT = n.C_p.dT - pdV$$

D'où

$$C_p - C_V = \frac{p}{n}\frac{dV}{dT}$$

Comme on est dans le cas d'un gaz parfait $p.V = n.R.T$. Il vient que :

$$\boxed{C_p = C_V + R}$$

Et

$$\boxed{dS = \frac{C_p}{T}dT - \frac{R}{p}dp}$$

4.

$1 \rightarrow 2$: transformation adiabatique : $\boxed{Q_1^2 = 0}$ et $\boxed{\Delta U = W_1^2 = C_V.(T_2 - T_1)}$

$2 \rightarrow 3$: transformation Isochore : $\boxed{W_2^3 = 0}$ et $\boxed{\Delta U = Q_2^3 = C_V.(T_3 - T_2)}$

$3 \rightarrow 4$: transformation adiabatique : $\boxed{Q_3^4 = 0}$ et $\boxed{\Delta U = W_3^4 = C_V.(T_4 - T_3)}$

$4 \rightarrow 1$: transformation isobare : $\boxed{W_4^1 = p.(V_4 - V_1) = R.(T_4 - T_1)}$ et $\boxed{Q_4^1 = C_p.(T_1 - T_4)}$

5. Efficacité moteur :

$$\eta = -\frac{W_{\text{cycle}}}{Q_{23}} = -\frac{(W_1^2 + W_3^4 + W_4^1)}{Q_{23}}$$

Donc

$$\eta = -\frac{C_V.(T_2 - T_1) + C_V.(T_4 - T_3) + R.(T_4 - T_1)}{C_V.(T_3 - T_2)}$$

D'où

$$\eta = 1 + \frac{(C_V + R).(T_4 - T_1)}{C_V.(T_3 - T_2)} = 1 + \frac{C_p}{C_V}\frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2)}$$

Et

$$\boxed{\eta = 1 + \gamma\frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2)}}$$

<u>Questions de cours</u> : (06 *points*)