

**CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATTRAPAGE**

MODULE : PHYSIQUE STATISTIQUE.

**EXERCICE 01 : (06 points)**

1. D'après la figure ci-contre les particules ayant une vitesse  $\vec{v}$  qui arrivent à la surface  $s$  du trou durant un intervalle de temps  $dt$ , sont contenues dans le prisme cylindrique de base  $s$  et de hauteur  $v \cdot dt \cdot \cos \alpha$ , avec  $\alpha$  est l'angle entre  $\vec{s}$  et  $\vec{v}$ . D'où les molécules incidentes sont contenues dans un volume

$$d\tau = v \cdot dt \cdot \cos \alpha \cdot s$$

Comme

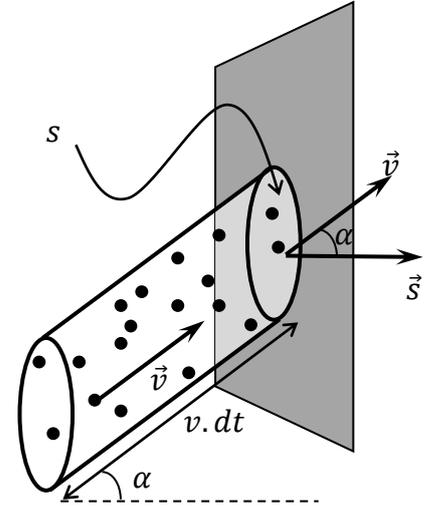
$$v \cdot \cos \alpha = \vec{v} \cdot \vec{e}_x = v_x$$

Alors

$$d\tau = v_x \cdot dt \cdot s$$

Le nombre de molécules contenues dans ce volume est obtenu en multipliant la densité volumique, considérée uniforme, par le volume

$$dN = \frac{N}{V} dt \cdot f(\vec{v}) \cdot dv_x dv_y dv_z = \frac{N}{V} v_x \cdot dt \cdot s \cdot f(\vec{v}) \cdot dv_x dv_y dv_z$$



La proportion de molécules ayant une vitesse  $\vec{v}$  est donnée par le facteur de Maxwell-Boltzmann

$$f(\vec{v}) = \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m}{2 \cdot k_B T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}$$

Pour obtenir le nombre de molécules du gaz qui traversent la surface  $s$  quelque soit leur vitesse (à condition que  $v_x > 0$ ) on intègre sur toutes les vitesses en respectant la condition précédente. Il vient que :

$$dN_s = \iiint \frac{N}{V} v_x \cdot dt \cdot s \cdot \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m}{2 \cdot k_B T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z$$

Et

$$dN_s = \frac{N}{V} dt \cdot s \left\{ \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x \cdot \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m}{2 \cdot k_B T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z \right\}$$

Comme

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x \cdot \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m}{2 \cdot k_B T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z = \int_0^{+\infty} v_x \cdot \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \cdot e^{-\frac{m}{2 \cdot k_B T} (v_x^2)} dv_x$$

Et

$$\int_0^{+\infty} v_x \cdot \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \cdot e^{-\frac{m}{2 \cdot k_B T} (v_x^2)} dv_x = \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \left[ -\frac{k_B T}{m} e^{-\frac{m}{2 \cdot k_B T} (v_x^2)} \right]_0^{+\infty} = \left( \frac{k_B T}{2\pi \cdot m} \right)^{1/2}$$

Alors :

$$\boxed{dN_s = \frac{N}{V} dt \cdot s \left( \frac{k_B T}{2\pi \cdot m} \right)^{1/2}}$$

2. La variation du nombre de particules dans l'enceinte :

$$dN = -dN_s = -\frac{N}{V} dt \cdot s \left( \frac{k_B T}{2\pi \cdot m} \right)^{1/2} = -\lambda \cdot N \cdot dt$$

Avec

$$\lambda = \frac{s}{V} \left( \frac{k_B T}{2\pi \cdot m} \right)^{1/2} = \frac{s}{V} \left( \frac{R \cdot T}{2\pi \cdot M} \right)^{1/2}$$

Donc

$$\frac{dN}{N} = -\lambda \cdot dt$$

En intégrant

$$\ln(N) = -\lambda \cdot t + C^{te} \Rightarrow \boxed{N(t) = N_0 \cdot \exp(-\lambda \cdot t)}$$

$N_0$  est le nombre de particule initial dans l'enceinte ( $t = 0$ ).

**EXERCICE 02 : (07 points)****1. Echange de chaleur.**

Transformation 1  $\rightarrow$  2 : compression adiabatique ( $Q_1^2 = 0$ ).

Transformation 2  $\rightarrow$  3 : chauffage isochore ( $Q_2^3 \neq 0$ ).

Transformation 3  $\rightarrow$  4 : détente adiabatique ( $Q_3^4 = 0$ ).

Transformation 4  $\rightarrow$  1 : refroidissement isochore ( $Q_4^1 \neq 0$ ).

**2. Transformation isochore dans le cas d'un gaz parfait.**

$$dU = n \cdot C_V \cdot dT \quad ; \quad \delta Q = n \cdot C_V \cdot dT \quad ; \quad \delta W = 0$$

Transformation 2  $\rightarrow$  3 : En intégrant, on a :

$$Q_2^3 = C_V \cdot \Delta T = \frac{3}{2} R \cdot (T_3 - T_2)$$

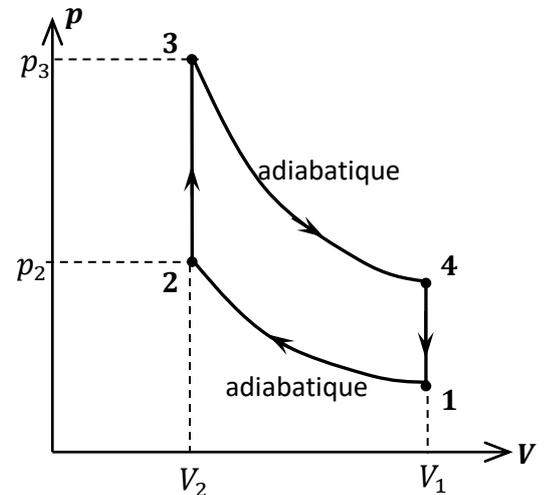
$Q_2^3 > 0$  : Chaleur absorbée par le gaz.

Transformation 4  $\rightarrow$  1 : En intégrant, on a :

$$Q_4^1 = C_V \cdot \Delta T = \frac{3}{2} R \cdot (T_1 - T_4)$$

$Q_4^1 < 0$  : Chaleur cédée par le gaz.

Pour une mole ( $n = 1$ ) de gaz parfait monoatomique ( $C_V = 3R/2$ ).

**3. Travail.**

Transformation 1  $\rightarrow$  2 : compression adiabatique ( $W_1^2 \neq 0$ ).

Transformation 2  $\rightarrow$  3 : chauffage isochore ( $W_2^3 = 0$ ).

Transformation 3  $\rightarrow$  4 : détente adiabatique ( $W_3^4 \neq 0$ ).

Transformation 4  $\rightarrow$  1 : refroidissement isochore ( $W_4^1 = 0$ ).

Transformation adiabatique dans le cas d'un gaz parfait.

$$dU = n \cdot C_V \cdot dT \quad ; \quad \delta Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta W = n \cdot C_V \cdot dT$$

Transformation 1  $\rightarrow$  2 : En intégrant, on a :

$$W_1^2 = C_V \cdot \Delta T = \frac{3}{2} R \cdot (T_2 - T_1)$$

Transformation 3  $\rightarrow$  4 : En intégrant, on a :

$$W_3^4 = C_V \cdot \Delta T = \frac{3}{2} R \cdot (T_4 - T_3)$$

Pour une mole ( $n = 1$ ) de gaz parfait monoatomique ( $C_V = 3R/2$ ).

## 4. Rendement travail.

$$\eta = \frac{\text{travail fourni par le moteur}}{\text{chaleur absorbée}}$$

La transformation 1 → 2 est adiabatique  $\Rightarrow p_1 \cdot V_1^\gamma = p_2 \cdot V_2^\gamma$

Et d'après l'équation d'état  $p = RT/V$  (pour une mole)

Donc

$$T_1 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_2^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} \quad \text{avec} \quad \gamma - 1 = \frac{C_p}{C_v} - 1 = \frac{2}{3}$$

Comme

$$V_2 < V_1 \Rightarrow T_1 < T_2 \quad \text{et} \quad W_1^2 > 0$$

Dans ce cas le gaz reçoit de l'énergie sous forme d'un travail du milieu extérieur.

De la même manière

$$T_3 \cdot V_3^{\gamma-1} = T_4 \cdot V_4^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\gamma-1} \quad \text{avec} \quad \gamma - 1 = \frac{C_p}{C_v} - 1 = \frac{2}{3}$$

Comme

$$V_3 = V_2 < V_4 = V_1 \Rightarrow T_3 > T_4 \quad \text{et} \quad W_3^4 < 0$$

Dans ce cas le gaz cède de l'énergie sous forme d'un travail au milieu extérieur.

D'où le travail fournis par le moteur en valeur absolue :

$$W = |W_1^2 + W_3^4| = -W_1^2 - W_3^4$$

$$\eta = \frac{-W_1^2 - W_3^4}{Q_2^3} = \frac{-T_2 + T_1 - T_4 + T_3}{T_3 - T_2} \Rightarrow \boxed{\eta = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}}$$

Comme

$$\begin{cases} T_1 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_2^{\gamma-1} \\ T_4 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_3 \cdot V_2^{\gamma-1} \end{cases} \Rightarrow (T_1 - T_4) \cdot V_1^{\gamma-1} = (T_2 - T_3) \cdot V_2^{\gamma-1}$$

D'où

$$\boxed{\eta = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}}$$

Pour un rendement de 90%

$$\eta = 0,9 \Rightarrow \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = 0,1 \quad \text{et} \quad V_2 = 0,1^{1/\gamma-1} \cdot V_1 = 0,1^{3/2} \cdot V_1$$

Donc

$$\boxed{V_2 = 0,0316 \cdot V_1} \quad \text{ou} \quad \boxed{V_1 = 31,623 \cdot V_2}$$

Ce qui n'est pas possible pour une voiture réelle.

**EXERCICE 03 : (07 points)**

$$\epsilon = -\alpha B m_z \quad \text{trois états} \quad \begin{cases} m_z = +1 \\ m_z = 0 \\ m_z = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{trois énergies possibles} \quad \begin{cases} \epsilon_1 = -\alpha B \\ \epsilon_0 = 0 \\ \epsilon_{-1} = \alpha B \end{cases}.$$

1. Dans le cas de  $N$  particules, l'état de plus basse énergie est donné par :

$$U_{min} = N \cdot \epsilon_{min} = N \cdot \epsilon_1 = -N\alpha B$$

Dans ce cas tous les moments magnétiques sont alignés dans le sens du champ magnétique extérieur  $\vec{B}$  ( $m_z = +1$ ).

2. Puisque les particules sont discernables  $Z = z^N$  :

Calculons  $z$  :

$$z = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

Donc

$$z = e^{-\beta\alpha B} + e^0 + e^{+\beta\alpha B} = 1 + 2 \cdot \cosh(\beta\alpha B)$$

Et

$$Z = (1 + 2 \cdot \cosh(\beta\alpha B))^N$$

3. Énergie interne :

$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -N \frac{\partial \ln z}{\partial \beta}$$

Comme  $\ln z = \ln(1 + \cosh(\beta\alpha B))$ , donc :

$$U = -N2\alpha B \frac{\sinh(\beta\alpha B)}{1 + 2 \cdot \cosh(\beta\alpha B)}$$

$$\text{Calcul de l'aimantation : } \begin{cases} n_1 = \text{le nombre de particules d'énergie } \epsilon_1 \\ n_0 = \text{le nombre de particules d'énergie } \epsilon_0 \\ n_{-1} = \text{le nombre de particules d'énergie } \epsilon_{-1} \end{cases}$$

D'où l'énergie du système est égale à :

$$U = \sum n_i \cdot \epsilon_i = n_1 \cdot \epsilon_1 + n_0 \cdot \epsilon_0 + n_{-1} \cdot \epsilon_{-1}$$

Donc

$$U = n_1 \cdot (-\alpha B) + n_0 \cdot (0) + n_{-1} \cdot (+\alpha B) = \alpha B \cdot (n_{-1} - n_1)$$

L'aimantation du système :

$$M_z = \sum n_i \cdot m_{zi} = n_1 \cdot (+1) + n_0 \cdot (0) + n_{-1} \cdot (-1)$$

Donc

$$M_z = (n_1 - n_{-1})$$

En comparant, il vient que :

$$U = -\alpha B \cdot M_z$$

D'où

$$M_z = -\frac{U}{\alpha B} = 2N \frac{\sinh(\beta\alpha B)}{1 + 2 \cdot \cosh(\beta\alpha B)}$$

4. Dans le cas où  $B$  est petit  $\Rightarrow \beta\alpha B = x \ll 1 \Rightarrow$  on utilise :  $\sinh x \simeq x$  et  $\cosh x \simeq 1$ .  
Dans ce cas :

$$M_z = \frac{2}{3} N \beta \alpha B = \chi \cdot B$$

Avec  $\chi$  la susceptibilité magnétique.

$$\chi = \frac{2 N \alpha}{3 k_B T}$$

Quand  $T \rightarrow 0 : \chi \rightarrow +\infty$ .

5. Energie libre  $F$ .

$$F = -k_B T \cdot \ln Z = -N k_B T \cdot \ln z$$

Donc

$$F = -N k_B T \cdot \ln(1 + 2 \cdot \cosh(\beta\alpha B))$$

L'entropie du système  $S$ .

$$F = U - TS \Rightarrow S = \frac{U - F}{T}$$

D'où

$$S = N k_B \left\{ \ln(1 + 2 \cdot \cosh(\beta\alpha B)) - \frac{2\beta\alpha B \times \sinh(\beta\alpha B)}{1 + 2 \cdot \cosh(\beta\alpha B)} \right\}$$

$T \rightarrow \infty \Rightarrow \beta\alpha B = x \ll 1 \Rightarrow$  on utilise :  $\sinh x \simeq x$  et  $\cosh x \simeq 1$ .

$$S = N k_B \left\{ \ln(3) - \frac{2}{3} (\beta\alpha B)^2 \right\}$$

$T \rightarrow 0 \Rightarrow e^{-\beta\alpha B} \simeq e^{-\infty} \rightarrow 0 \Rightarrow$  on utilise :  $\sinh(\beta\alpha B) \simeq \cosh(\beta\alpha B) \simeq \frac{1}{2} e^{\beta\alpha B} \gg 1$ .

$$S \simeq N k_B \{ \beta\alpha B - \beta\alpha B \} = 0$$

$S = 0$  correspond à un état parfaitement ordonné (question 1.).