

**CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATTRAPAGE**

MODULE : PHYSIQUE STATISTIQUE.

**EXERCICE 01: (12 points)****1. Pour un gaz parfait, et pour une transformation adiabatique**

$$pV^\gamma = \text{constante} \quad \text{et} \quad pV = nR.T$$

A partir de l'équation d'état, nous remplaçons le volume par

$$V = nR \frac{T}{p}$$

D'où

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{constante}$$

En élevant l'équation à la puissance  $(1/\gamma)$  nous obtenons

$$T \cdot p^{\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)} = \text{Constante}$$

**2. En utilisant le résultat précédent.**

Pour un gaz parfait monoatomique

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \Rightarrow \frac{1-\gamma}{\gamma} = \frac{C_v - C_p}{C_p} = -\frac{2}{5} = -0,4 \quad \text{avec} \quad C_v = \frac{3}{2}R \quad \text{et} \quad C_p = \frac{5}{2}R$$

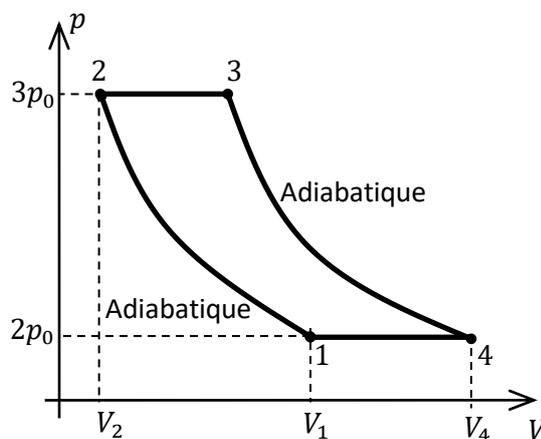
Donc

$$T_1 \cdot p_1^{-0,4} = T_2 \cdot p_2^{-0,4} \Rightarrow T_1 \cdot 2^{-0,4} p_0^{-0,4} = T_2 \cdot 3^{-0,4} p_0^{-0,4} \Rightarrow \boxed{T_2 = (1,5)^{0,4} T_1}$$

$$T_3 \cdot p_3^{-0,4} = T_4 \cdot p_4^{-0,4} \Rightarrow T_3 \cdot 3^{-0,4} p_0^{-0,4} = T_4 \cdot 2^{-0,4} p_0^{-0,4} \Rightarrow \boxed{T_4 = (1,5)^{-0,4} T_3}$$

Application numérique :

$$\boxed{T_1 = 20^\circ\text{C} = 293\text{ K}} \Rightarrow \boxed{T_2 = 344,591\text{ K}} \quad \text{et} \quad \boxed{T_3 = 40^\circ\text{C} = 313\text{ K}} \Rightarrow \boxed{T_4 = 266,138\text{ K}}$$

Le gaz arrive dans le local à une température inférieure à la température du local ( $T_4 < T_1$ ), et arrive à l'extérieur du local à une température supérieure à la température de l'extérieur ( $T_2 > T_3$ ).**3. Diagramme de Clapeyron.**

**4. Echange de chaleur durant les parties du cycle**(Pour une mole de gaz parfait  $n = 1$ ) :Transformation 1  $\rightarrow$  2 : Compression adiabatique.

$$\delta Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_1^2 = 0}$$

Transformation 2  $\rightarrow$  3 : Chauffage isobare.

$$\delta Q = n \cdot C_p \cdot dT \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_2^3 = C_p \cdot \Delta T = \frac{5}{2} R \cdot (T_3 - T_2)}$$

Transformation 3  $\rightarrow$  4 : Détente adiabatique.

$$\delta Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_3^4 = 0}$$

Transformation 4  $\rightarrow$  1 : Refroidissement isobare.

$$\delta Q = n \cdot C_p \cdot dT \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_4^1 = C_p \cdot \Delta T = \frac{5}{2} R \cdot (T_1 - T_4)}$$

**Travail durant les parties du cycle** (pour une mole de gaz parfait  $n = 1$ ) :Transformation 1  $\rightarrow$  2 : Compression adiabatique.

$$\delta Q = 0 \quad \Rightarrow \quad dU = n \cdot C_v \cdot dT = \delta W \quad \text{donc} \quad \boxed{W_1^2 = C_v \cdot \Delta T = \frac{3}{2} R \cdot (T_2 - T_1)}$$

Transformation 2  $\rightarrow$  3 : Chauffage isobare. ( $p = \text{constante}$ )

$$\delta W = -p \cdot dV = -nR \cdot dT \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_2^3 = -R \cdot \Delta T = -R \cdot (T_3 - T_2)}$$

Transformation 3  $\rightarrow$  4 : Détente adiabatique.

$$\delta Q = 0 \quad \Rightarrow \quad dU = n \cdot C_v \cdot dT = \delta W \quad \text{donc} \quad \boxed{W_3^4 = C_v \cdot \Delta T = \frac{3}{2} R \cdot (T_4 - T_3)}$$

Transformation 4  $\rightarrow$  1 : Refroidissement isobare. ( $p = \text{constante}$ )

$$\delta W = -p \cdot dV = -nR \cdot dT \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_4^1 = -R \cdot \Delta T = -R \cdot (T_1 - T_4)}$$

**5. Pour un cycle complet**

$$\boxed{Q_{\text{cycle}} = Q_1^2 + Q_2^3 + Q_3^4 + Q_4^1 = \frac{5}{2} R \cdot [(T_3 + T_1) - (T_2 + T_4)]}$$

En remplaçant

$$\boxed{Q_{\text{cycle}} = -98,245 \text{ Joules} < 0}$$

***Le gaz cède de la chaleur au milieu extérieur, le système joue le rôle d'une pompe à chaleur.*****6. Pour un cycle complet**

$$\Delta U_{\text{cycle}} = Q_{\text{cycle}} + W_{\text{cycle}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{\text{cycle}} = -Q_{\text{cycle}} = 98,245 \text{ Joules} > 0}$$

***Le gaz reçoit du travail fourni par le milieu extérieur.***

**7. Le coefficient d'efficacité.**

$$\varepsilon = \left| \frac{Q_4^1}{W_{\text{Cycle}}} \right| = \left| \frac{C_p \cdot (T_1 - T_4)}{C_p \cdot [(T_2 + T_4) - (T_3 + T_1)]} \right| \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{(T_1 - T_4)}{(T_2 + T_4) - (T_3 + T_1)}}$$

Application numérique :

$$\boxed{\varepsilon = 5,680}$$

**8. Variation d'entropie du gaz parfait (transformation réversible).**

Transformation 1 → 2 : Compression adiabatique.

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta S_{1 \rightarrow 2} = 0}$$

Transformation 2 → 3 : Chauffage isobare.

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = n \cdot C_p \frac{dT}{T} \Rightarrow \boxed{\Delta S_{2 \rightarrow 3} = C_p \cdot \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right)}$$

Transformation 3 → 4 : Détente adiabatique.

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta S_{3 \rightarrow 4} = 0}$$

Transformation 4 → 1 : Refroidissement isobare.

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = n \cdot C_p \frac{dT}{T} \Rightarrow \boxed{\Delta S_{4 \rightarrow 1} = C_p \cdot \ln\left(\frac{T_1}{T_4}\right)}$$

**Et pour le cycle complet**

$$\Delta S_{\text{cycle}} = \Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 4} + \Delta S_{4 \rightarrow 1} = C_p \cdot \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) + C_p \cdot \ln\left(\frac{T_1}{T_4}\right)$$

Ou

$$\Delta S_{\text{cycle}} = C_p \cdot \ln\left(\frac{T_3 T_1}{T_2 T_4}\right)$$

Comme

$$T_2 = (1,5)^{0,4} T_1 \quad \text{et} \quad T_4 = (1,5)^{-0,4} T_3 \Rightarrow \boxed{\Delta S_{\text{cycle}} = C_p \cdot \ln(1) = 0}$$

**EXERCICE 02 : (08 points)**

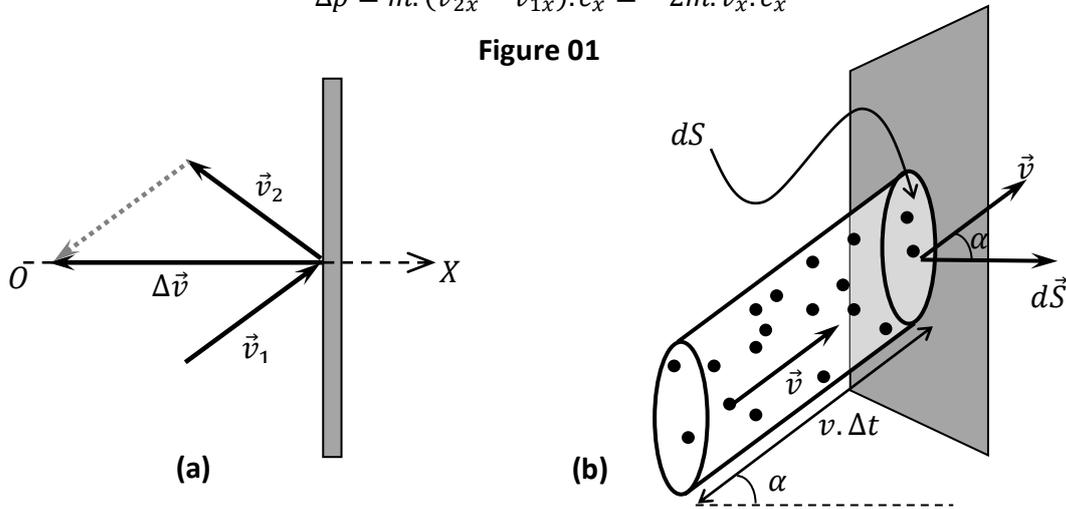
1. La variation de la quantité de mouvement de la molécule est égale à (figure 01.a.)

$$\Delta \vec{p} = m \cdot \Delta \vec{v} = m \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

Donc

$$\Delta \vec{p} = m \cdot (v_{2x} - v_{1x}) \cdot \vec{e}_x = -2m \cdot v_x \cdot \vec{e}_x$$

Figure 01



Et la force appliquée par la paroi sur la molécule

$$\vec{f}_{\text{paroi/molécule}} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = -\frac{2m \cdot v_x}{\Delta t} \vec{e}_x$$

En utilisant le principe de l'action et de la réaction, la force appliquée par la molécule sur la paroi est donnée par

$$\vec{f}_{\text{molécule/paroi}} = \vec{f} = \frac{2m \cdot v_x}{\Delta t} \vec{e}_x$$

2. Condition que doit vérifier la vitesse :  $v_x > 0$
3. D'après la figure 01.b. les particules ayant une vitesse  $\vec{v}$  qui frappent la surface  $dS$  durant un intervalle de temps  $\Delta t$ , sont contenues dans le prisme cylindrique de base  $dS$  et de hauteur  $v \cdot \Delta t \cdot \cos \alpha$ , avec  $\alpha$  est l'angle entre  $d\vec{S}$  et  $\vec{v}$ . D'où les molécules incidentes sont contenues dans un volume

$$d\tau = v \cdot \Delta t \cdot \cos \alpha \cdot dS$$

Comme

$$v \cdot \cos \alpha = \vec{v} \cdot \vec{e}_x = v_x$$

Alors

$$d\tau = v_x \cdot \Delta t \cdot dS$$

Le nombre de molécules contenues dans ce volume est obtenu en multipliant la densité volumique, considérée uniforme, par le volume

$$dN = \frac{N}{V} d\tau \cdot f(\vec{v}) \cdot dv_x dv_y dv_z = n \cdot v_x \cdot \Delta t \cdot dS \cdot f(\vec{v}) \cdot dv_x dv_y dv_z$$

4. Et la force appliquée par toutes les molécules ayant une vitesse  $\vec{v}$  est donnée par :

$$d\vec{F} = dN \cdot \vec{f} = \frac{2m \cdot N}{V} dS \cdot v_x^2 \cdot f(\vec{v}) \cdot dv_x dv_y dv_z \cdot \vec{e}_x$$

5. La proportion de molécules ayant une vitesse  $\vec{v}$  est donnée par le facteur de Maxwell-Boltzmann

$$f(\vec{v}) = A \cdot e^{-\frac{m}{2 \cdot k_B T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}$$

Normalisation :

$$\int dP(\vec{v}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{v}) \cdot dv_x dv_y dv_z = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A \cdot e^{-\frac{m}{2k_B T}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z = 1$$

D'où

$$A \cdot \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m \cdot v_x^2}{2 \cdot k_B T}} dv_x \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m \cdot v_y^2}{2 \cdot k_B T}} dv_y \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m \cdot v_z^2}{2 \cdot k_B T}} dv_z \right) = 1$$

Comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m \cdot v_x^2}{2 \cdot k_B T}} dv_x = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \times \sqrt{\pi}$$

Alors

$$A = \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{3/2}$$

6. Pour obtenir la force totale appliquée par toutes les molécules du gaz quelque soit leur vitesse (à condition que  $v_x > 0$ ) on intègre sur toutes les vitesses en respectant la condition précédente. Il vient que :

$$\vec{F} = \iiint d\vec{F} \cdot \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m}{2 \cdot k_B T}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z$$

Et

$$\vec{F} = \frac{2m \cdot N}{V} dS \left\{ \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \cdot \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m}{2 \cdot k_B T}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z \right\} \cdot \vec{e}_x$$

Comme

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \cdot \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m}{2 \cdot k_B T}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z = \frac{k_B T}{m}$$

Et que la fonction à intégrer est paire. Alors :

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \cdot \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m}{2 \cdot k_B T}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z = \frac{k_B T}{2m}$$

Donc

$$\vec{F} = \frac{N}{V} k_B T \cdot dS \cdot \vec{e}_x$$

7. La pression du gaz appliquée sur la paroi est donnée par

$$p = \frac{F}{dS} = \frac{N}{V} k_B T$$

On obtient finalement :

$$p \cdot V = N \cdot k_B T \quad \text{ou} \quad p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Conclusion : C'est l'équation d'état des gaz parfaits.