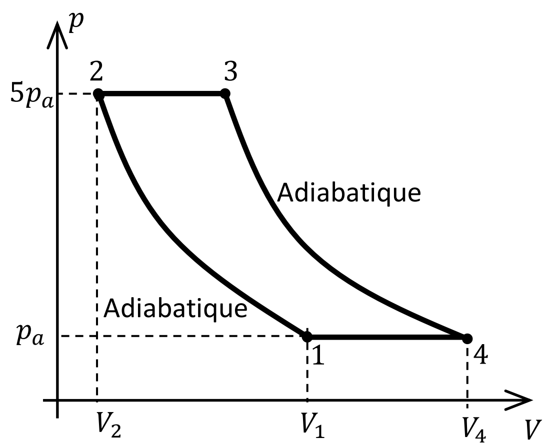
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

MODULE : PHYSIQUE STATISTIQUE.

EXERCICE 01: (10 points)

1. **Diagramme de Clapeyron.**



2. **Pour un gaz parfait diatomique,** et pour une transformation adiabatique

$$pV^{\gamma} = \text{constante} \qquad \text{et} \qquad pV = nR.T$$

Avec

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{7}{5} = 1{,}4 \qquad \text{avec} \qquad C_V = \frac{5}{2}R \quad \text{et} \quad C_p = \frac{7}{2}R$$

A l'état (1) et pour une mole $(n = 1)$.

$$p_1 = p_a \quad ; \quad T_1 = T_a \quad ; \quad p_1V_1 = nR.T_1 \quad \Rightarrow \quad V_1 = R\frac{T_a}{p_a}$$

A l'état (2) et pour une mole $(n = 1)$.

$$p_2 = 5p_a \quad ; \quad p_1V_1^{1,4} = p_2V_2^{1,4} \quad \Rightarrow \quad V_2 = \left(\frac{1}{5}\right)^{1/1,4} V_1 = \left(\frac{1}{5}\right)^{1/1,4} R\frac{T_a}{p_a} = 0{,}3167.R\frac{T_a}{p_a}$$

$$p_2V_2 = nR.T_2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 1{,}5838\,.T_a$$

A l'état (3) et pour une mole $(n = 1)$.

$$T_3 = 4{,}5.T_a \quad ; \quad p_3 = p_2 = 5p_a \quad ; \quad p_3V_3 = nR.T_3 \quad \Rightarrow \quad V_3 = 0{,}9R.\frac{T_a}{p_a}$$

A l'état (4) et pour une mole $(n = 1)$.

$$p_4 = p_a \quad ; \quad p_4V_4^{1,4} = p_3V_3^{1,4} \quad \Rightarrow \quad V_4 = 5^{1/1,4}V_3 = 0{,}9.\,5^{1/1,4}R\frac{T_a}{p_a} = 2{,}841.R\frac{T_a}{p_a}$$

$$p_4V_4 = nR.T_4 \quad \Rightarrow \quad T_4 = 2{,}841.T_a$$

D'où le tableau

Etat (1)	**Etat (2)**	**Etat (3)**	**Etat (4)**
$p_1 = p_a$	$p_2 = 5p_a$	$p_3 = 5p_a$	$p_4 = p_a$
$T_1 = T_a$	$T_2 = 1{,}5838\,.T_a$	$T_3 = 4{,}5.T_a$	$T_4 = 2{,}841.T_a$
$V_1 = R\,T_a/p_a$	$V_2 = 0{,}3167.R\,T_a/p_a$	$V_3 = 0{,}9.R\,T_a/p_a$	$V_4 = 2{,}841.R\,T_a/p_a$

3. Echanges de chaleur et travaux durant les parties du cycle

Transformation	ΔU	Q	W
$1 \to 2$	$nC_V\Delta T = 1{,}4595.RT_a$	0	$1{,}4595.RT_a$
$2 \to 3$	$nC_V\Delta T = 7{,}2905.RT_a$	$nC_p\Delta T = 10{,}2067.RT_a$	$-2{,}9162.RT_a$
$3 \to 4$	$nC_V\Delta T = -4{,}1475.RT_a$	0	$-4{,}1475.RT_a$
$4 \to 1$	$nC_V\Delta T = -4{,}6025.RT_a$	$nC_p\Delta T = -6{,}4435.RT_a$	$1{,}841.RT_a$
Cycle	0	$3{,}7632.RT_a$	$-3{,}7632.RT_a$

4. Vitesse du gaz à la sortie de la tuyère.

La vitesse quadratique moyenne

$$v^* = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3k_BT/m}$$

A la sortie de la tuyère $T = T_4 = 2{,}841.T_a$

$$\boxed{v^* = \sqrt{8{,}523.k_BT_a/m}}$$

5. Rendement moteur.

$$\boxed{\rho = \left|\frac{W_{\text{cycle}}}{Q_2^3}\right| = 36{,}87\ \%}$$

6. Variation d'entropie.

Pour une transformation adiabatique réversible (isentropique) :

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Delta S_{1\to 2} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta S_{3\to 4} = 0}$$

Pour une transformation isobare :

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = n.C_p\frac{dT}{T}$$

Donc

$$\boxed{\Delta S_{2\to 3} = C_p.\ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) = 3{,}6548.R} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta S_{4\to 1} = C_p.\ln\left(\frac{T_1}{T_4}\right) = -3{,}6548.R}$$

Et pour le cycle complet

$$\boxed{\Delta S_{\text{cycle}} = \Delta S_{1\to 2} + \Delta S_{2\to 3} + \Delta S_{3\to 4} + \Delta S_{4\to 1} = 0}$$

L'entropie S est une variable d'état, donc sa variation totale sur un cycle complet est nulle.

7. Application Numérique. $p_a = 1\ atm = 101325\ Pascal$; $T_a = 290\ K$; $R = 8{,}31\ J.K^{-1}mol^{-1}$

$p_1 = 1\ atm$	$p_2 = 5\ atm$	$p_3 = 5\ atm$	$p_4 = 1\ atm$
$T_1 = 290\ K$	$T_2 = 459{,}302\ K$	$T_3 = 1305\ K$	$T_4 = 823{,}89\ K$
$V_1 = 23{,}7838\ l$	$V_2 = 7{,}5323\ l$	$V_3 = 21{,}4054\ l$	$V_4 = 67{,}5699\ l$

Transformation	ΔU	Q	W
$1 \to 2$	$3517{,}2490\ J$	0	$3517{,}2490\ J$
$2 \to 3$	$17569{,}3759\ J$	$24597{,}1263\ J$	$-7027{,}7503\ J$
$3 \to 4$	$-9995{,}0602\ J$	0	$-9995{,}0602\ J$
$4 \to 1$	$-11091{,}5647\ J$	$-15528{,}1906\ J$	$4436{,}6259\ J$
Cycle	0	$8852{,}0446\ J$	$-8852{,}0446\ J$

EXERCICE 02 : **(10 points)**

1. **Nombre total de configurations possibles.**

$$\boxed{\Omega_{\text{tot}} = 2^N}$$

2. **Pour un état définit par n le nombre de moments orientés suivant le champ.**

Energie du système

$$E(n) = n.(-\epsilon) + (N-n).(+\epsilon) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{E(n) = -(2n-N)\mu B}$$

Le moment magnétique total

$$M(n) = n.(+\mu) + (N-n).(-\mu) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{M(n) = (2n-N)\mu}$$

Le volume total

$$\boxed{V = N.a^3}$$

3. **Nombre de configurations où le nombre de moments orientés suivant le champ est n.**

$$\Omega(n) = C_N^n = \frac{N!}{n! \times (N-n)!}$$

4. **Entropie**

$$S(n) = k_B.\ln\Omega(n) = k_B.\ln\left(\frac{N!}{n! \times (N-n)!}\right)$$

Dans l'approximation de Stirling

$$S(n) = k_B.\{N.\ln(N) - n.\ln(n) - (N-n).\ln(N-n)\}$$

5. **Température**

$$\frac{1}{T} = \left.\frac{\partial S}{\partial E}\right|_V = \left.\frac{\partial S}{\partial n}\right|_V \left.\frac{\partial n}{\partial E}\right|_V$$

Avec

$$\left.\frac{\partial n}{\partial E}\right|_V = -\frac{1}{2\mu B}$$

Donc

$$\frac{1}{T} = -\frac{k_B}{2\mu B}\{-\ln(n) - 1 + \ln(N-n) + 1\}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{k_B}{2\mu B}\ln\left(\frac{n}{N-n}\right)$$

En inversant cette relation

$$N - n = n.\exp\left(-\frac{2\mu B}{k_B T}\right) \qquad \Rightarrow \qquad n = \frac{N}{1 + \exp\left(-\frac{2\mu B}{k_B T}\right)} = \frac{N}{2}\frac{\exp(\mu B/k_B T)}{\cosh(\mu B/k_B T)}$$

Et l'énergie

$$E(n) = -(2n-N)\mu B = E(n) = -\left(\frac{\exp(\mu B/k_B T)}{\cosh(\mu B/k_B T)} - 1\right)N\mu B$$

Donc

$$\boxed{E(n) = -N\mu B.\tanh(\mu B/k_B T)}$$

6. La capacité calorifique

$$C_V = \left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_V = -N\mu B \frac{-(\mu B/k_B T^2)}{\cosh^2(\mu B/k_B T)} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{C_V = N k_B \frac{(\mu B/k_B T)^2}{\cosh^2(\mu B/k_B T)}}$$

7. La pression

$$\frac{p}{T} = \left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_E = \left.\frac{\partial S}{\partial N}\right|_E \left.\frac{\partial N}{\partial V}\right|_E$$

Avec

$$\left.\frac{\partial N}{\partial V}\right|_E = \frac{1}{a^3} \qquad (V = N.d)$$

Donc

$$\frac{p}{T} = \frac{k_B}{a^3}\left\{\ln(N) + N\frac{1}{N} - \ln\big((N-n)\big) - (N-n)\frac{1}{N-n}\right\}$$

$$\boxed{\frac{p}{T} = \frac{k_B}{a^3}\ln\left(\frac{N}{N-n}\right)}$$

Equation d'état

$$p.a^3 = k_B T.\ln\left(\frac{N}{N-n}\right)$$

En multipliant par N.

$$\boxed{p.V = N k_B T.\ln\left(\frac{N}{N-n}\right)}$$