



CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

Nom et Prénom : *John Doe*

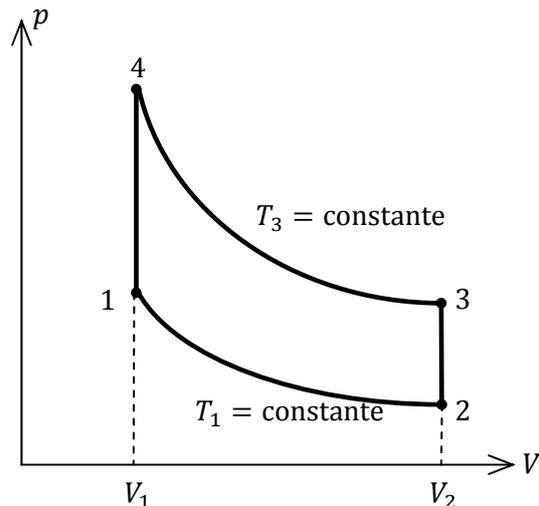
Signature :

Note : /20

Exercice 01 : Cycle thermodynamique. (10 points)

On fait décrire à une mole de gaz parfait monoatomique le cycle thermodynamique représenté dans la figure ci-contre.

$$\begin{cases} dU = n \cdot C_V \cdot dT \\ C_V = \frac{3}{2}R \\ n = 1 \end{cases}$$



1. Décrire les différentes transformations du cycle.

Transformation 1 → 2	<i>Transformation isotherme (T = constante).</i>
Transformation 2 → 3	<i>Transformation isochore (V = constante).</i>
Transformation 3 → 4	<i>Transformation isotherme (T = constante).</i>
Transformation 4 → 1	<i>Transformation isochore (V = constante).</i>

2. Décrire, brièvement, la contrainte à fournir (dispositif expérimental) pour obtenir chacune des transformations précédentes.

Transformation 1 → 2	<i>Thermostat avec un bon contact thermique avec le contenant du gaz.</i>
Transformation 2 → 3	<i>Enceinte (contenant) avec des parois rigides.</i>
Transformation 3 → 4	<i>Thermostat avec un bon contact thermique avec le contenant du gaz.</i>
Transformation 4 → 1	<i>Enceinte (contenant) avec des parois rigides.</i>

3. En fonction de R, T_1, T_3, V_1 et V_2 , remplir le tableau suivant.

	Variation d'énergie interne ΔU	Quantité de chaleur Q_A^B	Travail W_A^B
1 → 2	$U_2 - U_1 = 0$	$Q_1^2 = RT_1 \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$	$W_1^2 = -RT_1 \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$
2 → 3	$U_3 - U_2 = \frac{3}{2}R(T_3 - T_1)$	$Q_2^3 = \frac{3}{2}R(T_3 - T_1)$	$W_2^3 = 0$
3 → 4	$U_4 - U_3 = 0$	$Q_3^4 = RT_3 \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$	$W_3^4 = -RT_3 \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$
4 → 1	$U_1 - U_4 = \frac{3}{2}R(T_1 - T_3)$	$Q_4^1 = \frac{3}{2}R(T_1 - T_3)$	$W_4^1 = 0$
Cycle	$\Delta U_{\text{Cycle}} = 0$	$Q_{\text{Cycle}} = -R(T_3 - T_1) \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$	$W_{\text{Cycle}} = R(T_3 - T_1) \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

4. Calculer, en fonction de R, T_1, T_3, V_1 et V_2 , la variation de l'entropie du gaz parfait pour chaque transformation et la variation de son entropie ΔS_{Cycle} sur tout le cycle.

Transformation 1 → 2	$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{p \cdot dV}{T} = nR \frac{dV}{V} \Rightarrow \Delta S_{1 \rightarrow 2} = R \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$
Transformation 2 → 3	$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{n \cdot C_V \cdot dT}{T} = \frac{3}{2}R \frac{dT}{T} \Rightarrow \Delta S_{2 \rightarrow 3} = \frac{3}{2}R \cdot \ln\left(\frac{T_3}{T_1}\right)$
Transformation 3 → 4	$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{p \cdot dV}{T} = nR \frac{dV}{V} \Rightarrow \Delta S_{3 \rightarrow 4} = R \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$
Transformation 4 → 1	$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{n \cdot C_V \cdot dT}{T} = \frac{3}{2}R \frac{dT}{T} \Rightarrow \Delta S_{4 \rightarrow 1} = \frac{3}{2}R \cdot \ln\left(\frac{T_1}{T_3}\right)$
Cycle	$\Delta S_{\text{Cycle}} = 0$

5. Ecrire, en fonction de T_1 et T_3 , le coefficient de performance défini par :

$$\omega = \frac{Q_1^2}{W_{\text{Cycle}}}$$

$$\omega = \frac{Q_1^2}{W_{\text{Cycle}}} = \frac{RT_1 \cdot \ln(V_2/V_1)}{R(T_3 - T_1) \cdot \ln(V_2/V_1)}$$

Donc

$$\omega = \frac{T_1}{T_3 - T_1}$$

Nom et Prénom : *John Doe*

Signature :

Exercice 02 : Ensemble canonique. (10 points)

Soit un ensemble de N atomes identiques, discernables, indépendants et en équilibre thermique T . Chaque atome possède un moment cinétique total \vec{J} . En présence d'un champ magnétique externe \vec{B} chaque atome peut occuper $(2J + 1)$ états d'énergie non dégénérés

$$\epsilon_{m_J} = m_J \cdot g \mu_B B \quad \text{avec} \quad m_J = -J, -J + 1, \dots, J - 1, J$$

g étant le facteur de Landé (sans dimension) et μ_B le magnéton de Bohr.

1. Calculer la fonction de partition canonique Z du système.

$$z = \sum_{m_J=-J}^{+J} e^{-\beta \cdot \epsilon_{m_J}} = \sum_{m_J=-J}^{+J} e^{-m_J \cdot \beta g \mu_B B} = \sum_{m_J=-J}^{+J} (e^{-\beta g \mu_B B})^{m_J}$$

On utilise

$$\sum_{m_J=-J}^{+J} a^{m_J} = \frac{a^{(J+\frac{1}{2})} - a^{-(J+\frac{1}{2})}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}}$$

Ce qui donne

$$z = \frac{e^{-(J+\frac{1}{2})\beta g \mu_B B} - e^{+(J+\frac{1}{2})\beta g \mu_B B}}{e^{-\frac{1}{2}\beta g \mu_B B} - e^{+\frac{1}{2}\beta g \mu_B B}}$$

$$Z = z^N = \left(\frac{\sinh((J + 1/2)\beta g \mu_B B)}{\sinh((1/2)\beta g \mu_B B)} \right)^N$$

2. Calculer l'énergie moyenne \bar{E} du système que nous assimilerons à son énergie interne U .

$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -N \frac{\partial \ln z}{\partial \beta}$$

Donc

$$U = -N \left\{ \frac{\partial \ln \sinh((J + 1/2)\beta g \mu_B B)}{\partial \beta} - \frac{\partial \ln \sinh((1/2)\beta g \mu_B B)}{\partial \beta} \right\}$$

$$U = -N \left\{ \left(J + \frac{1}{2} \right) g \mu_B B \frac{\cosh((J + 1/2)\beta g \mu_B B)}{\sinh((J + 1/2)\beta g \mu_B B)} - \frac{1}{2} g \mu_B B \frac{\cosh((1/2)\beta g \mu_B B)}{\sinh((1/2)\beta g \mu_B B)} \right\}$$

Et

$$U = -N g \mu_B B \left\{ \left(J + \frac{1}{2} \right) \coth \left(\left(J + \frac{1}{2} \right) \beta g \mu_B B \right) - \frac{1}{2} \coth \left(\frac{1}{2} \beta g \mu_B B \right) \right\}$$

3. En déduire la capacité calorifique à volume constant C_V .

$$C_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V = \left. \frac{\partial U}{\partial \beta} \right|_V \frac{\partial \beta}{\partial T} \quad \Rightarrow \quad C_V = -\frac{1}{k_B T^2} \left. \frac{\partial U}{\partial \beta} \right|_V = -k_B \beta^2 \left(\left. \frac{\partial U}{\partial \beta} \right|_V \right)$$

On utilise

$$\frac{d \coth(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \right) = \frac{\sinh^2(x) - \cosh^2(x)}{\sinh^2(x)} = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$$

D'où

$$C_V = -k_B \beta^2 \left(\left. \frac{\partial U}{\partial \beta} \right|_V \right) = N k_B \left\{ \frac{1}{4} \frac{(\beta g \mu_B B)^2}{\sinh^2(1/2 \beta g \mu_B B)} - \left(J + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{(\beta g \mu_B B)^2}{\sinh^2((J + 1/2)\beta g \mu_B B)} \right\}$$

4. Etudier le comportement de U et de C_V , dans le cas où $T \gg \theta_J$ et dans le cas où $T \ll \theta_J$. Tel que θ_J est une température caractéristique que l'on déterminera.

Pour : $\beta g \mu_B B \ll 1$

$$\frac{g \mu_B B}{k_B T} \ll 1 \quad \text{et} \quad T \gg \theta_J \quad \text{avec} \quad \theta_J = \frac{g \mu_B B}{k_B}$$

$$U \approx -\frac{1}{3} J(J+1) \cdot N k_B T \cdot \left(\frac{g \mu_B B}{k_B T} \right)^2 \quad \text{et} \quad C_V \approx 0$$

Pour : $\beta g \mu_B B \gg 1$

$$\frac{g \mu_B B}{k_B T} \gg 1 \quad \text{et} \quad T \ll \theta_J \quad \text{avec} \quad \theta_J = \frac{g \mu_B B}{k_B}$$

$$U \approx -N g \mu_B B \cdot J \quad \text{et} \quad C_V \approx N k_B (\beta g \mu_B B)^2 e^{-\beta g \mu_B B} \{1 - (2J+1)^2 e^{-(2J+1)}\}$$

5. Déterminer la probabilité $P(m_J)$ pour un atome pour se trouver à un niveau d'énergie ϵ_{m_J} .

$$P(m_J) = \frac{1}{Z} e^{-\beta \epsilon_{m_J}}$$

D'où

$$P(m_J) = \frac{\sinh((1/2)\beta g \mu_B B)}{\sinh((J+1/2)\beta g \mu_B B)} e^{-m_J \beta g \mu_B B}$$

6. La composante du moment magnétique d'un atome suivant la direction du champ \vec{B} est donnée par : $\mu_{m_J} = -m_J \cdot g \mu_B$. Trouver alors, le moment moyen par atome $\bar{\mu}$ dans cette direction.

$$\bar{\mu} = \sum_{m_J=-J}^{+J} \mu_{m_J} \cdot P(m_J)$$

$$\bar{\mu} = \sum_{m_J=-J}^{+J} -m_J \cdot g \mu_B \cdot P(m_J) = -\frac{\bar{E}}{NB} = -\frac{U}{NB}$$

Donc

$$\bar{\mu} = g \mu_B \left\{ \left(J + \frac{1}{2} \right) \coth \left(\left(J + \frac{1}{2} \right) \beta g \mu_B B \right) - \frac{1}{2} \coth \left(\frac{1}{2} \beta g \mu_B B \right) \right\}$$

On donne :

$$\sum_{m_J=-J}^{+J} a^{m_J} = \frac{a^{(J+\frac{1}{2})} - a^{-(J+\frac{1}{2})}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}} \quad ; \quad \begin{cases} \sinh x \approx x & \text{et} & \coth x \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{3} & \text{pour} & x \ll 1 \\ \sinh x \approx \frac{1}{2} e^x & \text{et} & \coth x \approx 1 & \text{pour} & x \gg 1 \end{cases}$$