FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

UNITÉ : PHYSIQUE STATISTIQUE

EXERCICE 01: (08 *points*)

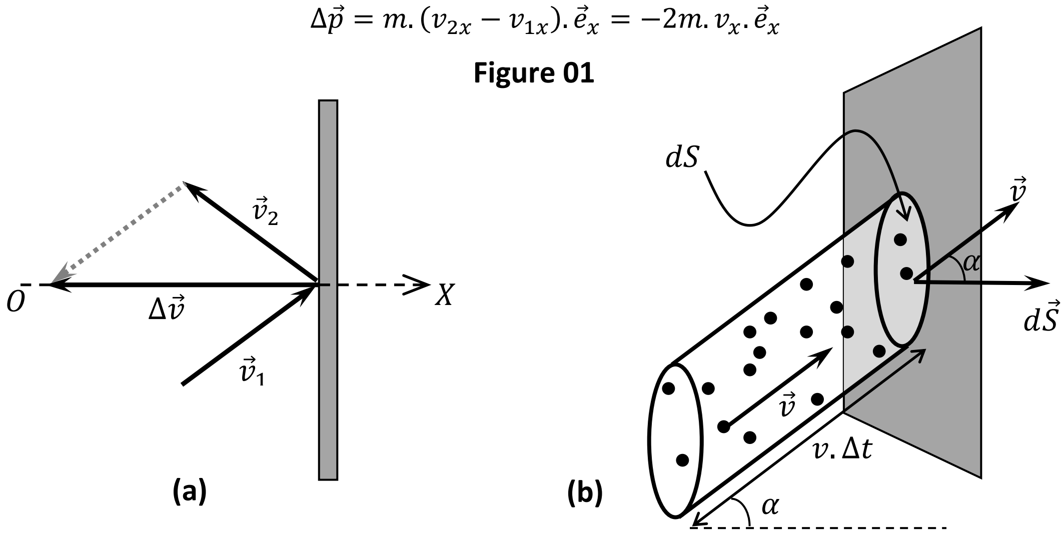
1. La variation de la quantité de mouvement de la molécule est égale à (figure 01.a.)

$$\Delta\vec{p} = m.\Delta\vec{v} = m.(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

Donc

$$\Delta\vec{p} = m.(v_{2x} - v_{1x}).\vec{e}_x = -2m.v_x.\vec{e}_x$$

Figure 01



Et la force appliquée par la paroi sur la molécule

$$\vec{f}_{\text{paroi/molécule}} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = -\frac{2m.v_x}{\Delta t}\vec{e}_x$$

En utilisant le principe de l'action et de la réaction, la force appliquée par la molécule sur la paroi est donnée par

$$\boxed{\vec{f}_{\text{molécule/paroi}} = \vec{f} = \frac{2m.v_x}{\Delta t}\vec{e}_x}$$

2. Condition que doit vérifier la vitesse : $\boxed{v_x > 0}$

3. D'après la figure 01.b. les particules ayant une vitesse $\vec{v}$ qui frappent la surface dS durant un intervalle de temps Δt, sont contenues dans le prisme cylindrique de base dS et de hauteur $v.\Delta t.\cos\alpha$, avec α est l'angle entre $d\vec{S}$ et $\vec{v}$. D'où les molécules incidentes sont contenues dans un volume

$$d\tau = v.\Delta t.\cos\alpha\,.dS$$

Comme

$$v.\cos\alpha = \vec{v} \bullet \vec{e}_x = v_x$$

Alors

$$d\tau = v_x.\Delta t.dS$$

Le nombre de molécules contenues dans ce volume est obtenu en multipliant la densité volumique, considérée uniforme, par le volume

$$\boxed{dN = \frac{N}{V}d\tau.f(\vec{v}).dv_x dv_y dv_z = n.v_x.\Delta t.dS.f(\vec{v}).dv_x dv_y dv_z}$$

4. Et la force appliquée par toutes les molécules ayant une vitesse $\vec{v}$ est donnée par :

$$\boxed{d\vec{F} = dN.\vec{f} = \frac{2m.N}{V}dS.v_x^2.f(\vec{v}).dv_x dv_y dv_z.\vec{e}_x}$$

5. La proportion de molécules ayant une vitesse $\vec{v}$ est donnée par le facteur de Maxwell–Boltzmann

$$f(\vec{v}) = A.e^{-\frac{m}{2.k_BT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}$$

Normalisation :

$$\int dP(\vec{v}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{v}).dv_xdv_ydv_z = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A.e^{-\frac{m}{2.k_BT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}dv_xdv_ydv_z = 1$$

D'où

$$A.\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m.v_x^2}{2.k_BT}}dv_x\right).\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m.v_x^2}{2.k_BT}}dv_x\right).\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m.v_x^2}{2.k_BT}}dv_x\right) = 1$$

Comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m.v_x^2}{2.k_BT}}dv_x = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}} \times \sqrt{\pi}$$

Alors

$$\boxed{A = \left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2}}$$

6. Pour obtenir *la force totale appliquée par toutes les molécules du gaz quelque soit leur vitesse* (à condition que $v_x > 0$) on intègre sur toutes les vitesses en respectant la condition précédente. Il vient que :

$$\vec{F} = \iiint d\vec{F}.\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2}.e^{-\frac{m}{2.k_BT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}dv_xdv_ydv_z$$

Et

$$\vec{F} = \frac{2m.N}{V}dS\left\{\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2.\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2}.e^{-\frac{m}{2.k_BT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}dv_xdv_ydv_z\right\}.\vec{e}_x$$

Comme

$$\langle v_x^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2.\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2}.e^{-\frac{m}{2.k_BT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}dv_xdv_ydv_z = \frac{k_BT}{m}$$

Et que la fonction à intégrer est paire. Alors :

$$\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2.\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2}.e^{-\frac{m}{2.k_BT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}dv_xdv_ydv_z = \frac{k_BT}{2m}$$

Donc

$$\boxed{\vec{F} = \frac{N}{V}k_BT.dS.\vec{e}_x}$$

7. La pression du gaz appliquée sur la paroi est donnée par

$$p = \frac{F}{dS} = \frac{N}{V}k_BT$$

On obtient finalement :

$$\boxed{p.V = N.k_BT} \quad \text{ou} \quad p.V = n.R.T$$

Conclusion : C'est <u>l'équation d'état des gaz parfaits</u>.

<u>EXERCICE 02:</u> (12 *points*)

<u>ENSEMBLE MICROCANONIQUE</u>

1. Energie de la chaîne. Nous avons n molécules d'énergie $-\epsilon$, et $N-n$ molécules d'énergie 0. Donc :

$$E = n.(-\epsilon) + (N-n).0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{E = -n.\epsilon}$$

2. $S = k_B.\ln(\Omega_n)$, tel que Ω_n est le nombre de configurations correspondants à n molécules verticales.

$$\Omega_n = C_N^n = \frac{N!}{n! \times (N-n)!}$$

En utilisant l'approximation de Stirling.

$$S = k_B.\left[N.\ln(N) - n.\ln(n) - (N-n).\ln\big((N-n)\big)\right]$$

Ce qui nous donne

$$\boxed{S = k_B\left(N.\ln\left(\frac{N}{N-n}\right) - n.\ln\left(\frac{n}{N-n}\right)\right)}$$

3. Température

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial E} = -\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial S}{\partial n}$$

En dérivant

$$\boxed{\frac{1}{T} = \frac{k_B}{\epsilon}\ln\left(\frac{n}{N-n}\right)}$$

<u>ENSEMBLE CANONIQUE</u>

4. Calcul de la fonction de partition canonique z d'une seule molécule.

$$\boxed{z = \textstyle\sum_n e^{-\beta E_n}} \quad \Rightarrow \quad z = e^{-\beta.(0)} + e^{-\beta.(-\epsilon)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = 1 + e^{\beta\epsilon}}$$

Fonction de partition canonique Z correspondant à N molécules *<u>discernables</u>*.

$$\boxed{Z = z^N = \left(1 + e^{\beta\epsilon}\right)^N}$$

5. Energie interne du système U.

$$\boxed{U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -N\frac{\partial \ln z}{\partial \beta}}$$

Comme $\boxed{\ln z = \ln\left(1 + e^{\beta\epsilon}\right)}$

$$\boxed{U = -N\epsilon\frac{e^{\beta\epsilon}}{1 + e^{\beta\epsilon}}}$$

6. Energie libre F . $\boxed{F = -k_B T.\ln Z = -N k_B T.\ln z}$

Donc

$$\boxed{F = -N k_B T.\ln\left(1 + e^{\beta\epsilon}\right)}$$

7. L'entropie du système S.

$$F = U - TS \quad \Rightarrow \quad \boxed{S = (U-F)/T}$$

Alors

$$\boxed{S = N k_B.\left[\ln\left(1 + e^{\beta\epsilon}\right) - \beta\epsilon\frac{e^{\beta\epsilon}}{(1 + e^{\beta\epsilon})}\right]}$$

8. La chaleur spécifique à longueur constante C_L est donnée par :

$$\boxed{C_L = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_L}$$

Que nous pouvons réécrire :

$$C_L = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial \beta}{\partial T}\frac{\partial U}{\partial \beta} = -\frac{1}{k_B T^2}\frac{\partial U}{\partial \beta}$$

En utilisant l'expression de l'énergie interne

$$\boxed{C_L = \frac{N\epsilon^2}{k_B T^2}\frac{e^{\beta\epsilon}}{(1+e^{\beta\epsilon})^2}}$$

Ou

$$C_L = \frac{N\epsilon^2}{k_B T^2}\frac{1}{\left(e^{-\frac{\beta\epsilon}{2}} + e^{\frac{\beta\epsilon}{2}}\right)^2}$$

Enfin

$$\boxed{C_L = Nk_B\left(\frac{\beta\epsilon}{2}\right)^2\frac{1}{\mathrm{ch}^2(\beta\epsilon/2)}}$$

9. Probabilités :

$$\begin{cases} P_H = \dfrac{1}{z}e^{-\beta.(0)} \\ P_V = \dfrac{1}{z}e^{-\beta.(-\epsilon)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} P_H = \dfrac{1}{1+e^{\beta\epsilon}} \\ P_V = \dfrac{e^{\beta\epsilon}}{1+e^{\beta\epsilon}} \end{cases}}$$

10. Longueur de la chaîne :

$$\boxed{L = n.a + (N-n).2a = (2N-n).a}$$

11. Longueur moyenne :

$$\bar{L} = N.(l_H.P_H + l_V.P_V) = N.\left(2a\frac{1}{1+e^{\beta\epsilon}} + a\frac{e^{\beta\epsilon}}{1+e^{\beta\epsilon}}\right)$$

D'où

$$\boxed{\bar{L} = Na\left(\frac{2+e^{\beta\epsilon}}{1+e^{\beta\epsilon}}\right)}$$

12. Variance :

$$\overline{L^2} = N^2.(l_H^2.P_H + l_V^2.P_V) = N^2.\left(4a^2\frac{1}{1+e^{\beta\epsilon}} + a^2\frac{e^{\beta\epsilon}}{1+e^{\beta\epsilon}}\right)$$

Donc

$$\overline{L^2} = N^2a^2\left(\frac{4+e^{\beta\epsilon}}{1+e^{\beta\epsilon}}\right)$$

Et la variance est égale à :

$$\boxed{\mathrm{Var}(L) = \overline{L^2} - (\bar{L})^2}$$

Ce qui nous donne

$$\boxed{\mathrm{Var}(L) = N^2a^2\frac{e^{\beta\epsilon}}{(1+e^{\beta\epsilon})^2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{Var(L) = \frac{N^2a^2}{4}\frac{1}{\cosh^2(\beta\epsilon/2)}}$$