

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : PHYSIQUE STATISTIQUE

EXERCICE 01: (10 points)

1. Vitesse quadratique moyenne.

$$v^* = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{k_B T}{m}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{R \cdot T}{M}}$$

Avec $R = k_B \cdot \mathcal{N}_A$ et $M = m \cdot \mathcal{N}_A$
 (\mathcal{N}_A est le nombre d'Avogadro et M la masse molaire).

2. D'après la figure ci-contre les particules ayant une vitesse \vec{v} qui frappent la surface s durant un intervalle de temps dt , sont contenues dans le prisme cylindrique de base s et de hauteur $v \cdot dt \cdot \cos \alpha$, avec α est l'angle entre \vec{s} et \vec{v} . D'où les molécules incidentes sont contenues dans un volume

$$d\tau = v \cdot dt \cdot \cos \alpha \cdot s$$

Comme

$$v \cdot \cos \alpha = \vec{v} \cdot \vec{e}_x = v_x$$

Alors

$$d\tau = v_x \cdot dt \cdot s$$

Le nombre de molécules contenues dans ce volume est obtenu en multipliant la densité volumique, considérée uniforme, par le volume

$$dN = \frac{N_1}{V} dt \cdot f(\vec{v}) \cdot dv_x dv_y dv_z = \frac{N_1}{V} v_x \cdot dt \cdot s \cdot f(\vec{v}) \cdot dv_x dv_y dv_z$$

La proportion de molécules ayant une vitesse \vec{v} est donnée par le facteur de Maxwell-Boltzmann

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m}{2 \cdot k_B T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}$$

Pour obtenir le nombre de molécules du gaz qui traversent la surface s quelque soit leur vitesse (à condition que $v_x > 0$) on intègre sur toutes les vitesses en respectant la condition précédente. Il vient que :

$$dN_{1 \rightarrow 2} = \iiint \frac{N_1}{V} v_x \cdot dt \cdot s \cdot \left(\frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m}{2 \cdot k_B T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z$$

Et

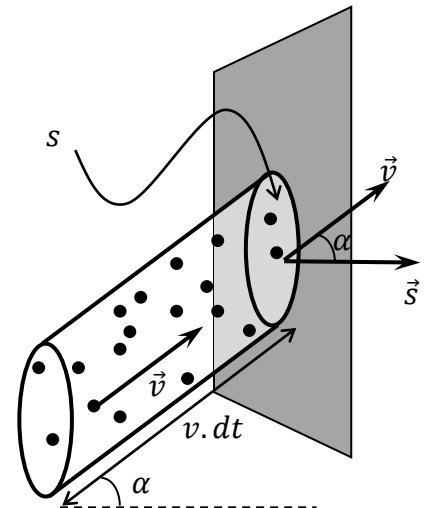
$$dN_{1 \rightarrow 2} = \frac{N_1}{V} dt \cdot s \left\{ \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x \cdot \left(\frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m}{2 \cdot k_B T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z \right\}$$

Comme

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x \cdot \left(\frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m}{2 \cdot k_B T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z = \int_0^{+\infty} v_x \cdot \left(\frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \cdot e^{-\frac{m}{2 \cdot k_B T} (v_x^2)} dv_x$$

Et

$$\int_0^{+\infty} v_x \cdot \left(\frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \cdot e^{-\frac{m}{2 \cdot k_B T} (v_x^2)} dv_x = \left(\frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \left[-\frac{k_B T}{m} e^{-\frac{m}{2 \cdot k_B T} (v_x^2)} \right]_0^{+\infty} = \left(\frac{k_B T}{2\pi \cdot m} \right)^{1/2}$$



Alors :

$$dN_{1 \rightarrow 2} = \frac{N_1}{V} dt \cdot s \left(\frac{k_B T}{2\pi \cdot m} \right)^{1/2}$$

3.

$$dN_{1 \rightarrow 2} = \frac{N_1}{V} dt \cdot s \left(\frac{k_B T}{2\pi \cdot m} \right)^{1/2} = \lambda \cdot N_1 \cdot dt$$

Donc

$$\lambda = \frac{s}{V} \left(\frac{k_B T}{2\pi \cdot m} \right)^{1/2} = \frac{s}{V} \left(\frac{R \cdot T}{2\pi \cdot M} \right)^{1/2} \quad \text{A. N.} \quad \lambda = 99,73 \text{ sec}^{-1}$$

4. La variation du nombre de molécules dans l'enceinte E_1 .

$$dN_1 = -dN_{1 \rightarrow 2} + dN_{2 \rightarrow 1}$$

Puisque les deux enceintes sont identiques en volume et que le trou est le même (en considérant que les molécules n'interagissent pas entre elles en entrant et en sortant du trou) $dN_{2 \rightarrow 1} = \lambda \cdot N_2 \cdot dt$. D'où :

$$dN_1 = -\lambda \cdot N_1 \cdot dt + \lambda \cdot N_2 \cdot dt$$

Et

$$\frac{dN_1}{dt} + \lambda \cdot (N_1 - N_2) = 0$$

La variation du nombre de molécules dans l'enceinte E_2 .

$$dN_2 = -dN_{2 \rightarrow 1} - dN_{2 \rightarrow \text{vide}} + dN_{1 \rightarrow 2}$$

De même que précédemment :

$$dN_{2 \rightarrow 1} = \lambda \cdot N_2 \cdot dt \quad \text{et} \quad dN_{2 \rightarrow \text{vide}} = \lambda \cdot N_2 \cdot dt$$

D'où

$$dN_2 = +\lambda \cdot N_1 \cdot dt - 2\lambda \cdot N_2 \cdot dt$$

Et

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda \cdot (2N_2 - N_1) = 0$$

5. Pour N_2 maximum nous avons :

$$\frac{dN_2}{dt} = 0$$

En remplaçant dans la seconde équation, on obtient :

$$(2N_2 - N_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{N_1}{N_2} = 2$$

6. Quand le trou est fermé :

$$\begin{aligned} dN_1 &= -dN_{1 \rightarrow 2} + dN_{2 \rightarrow 1} = -\lambda \cdot N_1 \cdot dt + \lambda \cdot N_2 \cdot dt \\ dN_2 &= -dN_{2 \rightarrow 1} + dN_{1 \rightarrow 2} = -\lambda \cdot N_1 \cdot dt + \lambda \cdot N_2 \cdot dt = -dN_1 \end{aligned}$$

Les deux équations différentielles deviennent :

$$\frac{dN_1}{dt} + \lambda \cdot (N_1 - N_2) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dN_2}{dt} + \lambda \cdot (N_2 - N_1) = 0$$

Et le maximum est obtenu pour :

$$\frac{dN_2}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = N_2$$

EXERCICE 02: (10 points)

$$\epsilon_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{avec} \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

1. Calcul de la fonction de partition canonique z d'une seule molécule.

$$z = \sum_n e^{-\beta\epsilon_n}$$

En remplaçant :

$$z = \sum_n e^{-\beta\hbar\omega(n+\frac{1}{2})} = e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}} \left(\sum_n e^{-\beta\hbar\omega n} \right)$$

En utilisant la somme d'une suite géométrique $1 + x + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ avec $x = e^{-\beta\hbar\omega}$:

$$z = e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}} \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right)$$

Comme la somme se fait sur tous les nombres naturels :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-\beta\hbar\omega})^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n+1)} = 0$$

Donc

$$z = e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \right) \quad \text{ou} \quad z = \frac{1}{2 \cdot \sinh\left(\beta\frac{\hbar\omega}{2}\right)}$$

Fonction de partition canonique Z correspondant à N molécules discernables.

$$Z = z^N = \left(2 \cdot \sinh\left(\beta\frac{\hbar\omega}{2}\right) \right)^{-N}$$

2. Energie interne du système U .

$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -N \frac{\partial \ln z}{\partial \beta}$$

Donc

$$U = N \frac{\hbar\omega}{2} \tanh\left(\beta\frac{\hbar\omega}{2}\right)$$

Energie libre F .

$$F = -k_B T \cdot \ln Z = -N k_B T \cdot \ln z$$

Donc

$$F = N k_B T \cdot \ln \left(2 \cdot \sinh\left(\beta\frac{\hbar\omega}{2}\right) \right)$$

3. Capacité calorifique à volume constant.

$$C_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V = N k_B \left(\beta \frac{\hbar\omega}{2} \right)^2 \frac{1}{\cosh^2\left(\beta\frac{\hbar\omega}{2}\right)}$$

4. Particules discernables.

$$Z = z^N$$

5. Calcul de la fonction de partition canonique d'une particule d'énergie $\epsilon_{n,p,q} = \hbar\omega(n+p+q)$.

$$z = \sum_{n,p,q} e^{-\beta\epsilon_{n,p,q}}$$

En remplaçant :

$$z = \sum_n \sum_p \sum_q e^{-\beta \hbar \omega (n+p+q)} = (\sum_n e^{-\beta \hbar \omega n}) (\sum_p e^{-\beta \hbar \omega p}) (\sum_q e^{-\beta \hbar \omega q})$$

Ou bien

$$z = (\sum_n (e^{-\beta \hbar \omega})^n) (\sum_p (e^{-\beta \hbar \omega})^p) (\sum_q (e^{-\beta \hbar \omega})^q)$$

De la même façon que dans la question 1. On obtient :

$$z = \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} \right)^3 \quad \text{ou} \quad z = \frac{1}{(1 - e^{-\theta_E/T})^3}$$

Avec $\theta_E = \hbar \omega / k_B$ est une constante appelée température d'Einstein.

6. Energie interne du système U .

$$U = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -N \frac{\partial \ln z}{\partial \beta}$$

Comme $\ln z = -3 \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega})$, donc :

$$U = 3N \frac{-(-\hbar \omega) e^{-\beta \hbar \omega}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}}$$

Et

$$U = 3N \hbar \omega \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} = 3N k_B \frac{\theta_E}{e^{\theta_E/T} - 1}$$

7. Pour une seule particule $u = 3k_B \frac{\theta_E}{e^{\theta_E/T} - 1}$.

Quand $T \gg \theta_E \Rightarrow \theta_E/T \ll 1 \Rightarrow e^{\theta_E/T} \simeq 1 + \theta_E/T$.

Donc

$$u = 3k_B T$$

8. Capacité calorifique à volume constant.

$$C_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V = -3N k_B \frac{\theta_E (-\theta_E/T^2) e^{\theta_E/T}}{(e^{\theta_E/T} - 1)^2}$$

Ce qui donne

$$C_V = 3N k_B \left(\frac{\theta_E}{T} \right)^2 \frac{e^{\theta_E/T}}{(e^{\theta_E/T} - 1)^2} = 3N k_B \left(\frac{\theta_E}{2T} \right)^2 \frac{1}{\sinh^2(\theta_E/2T)}$$

9. Quand $T \gg \theta_E \Rightarrow \theta_E/2T \ll 1 \Rightarrow \sinh(\theta_E/2T) \simeq \theta_E/2T$. Donc :

$$C_V = 3N k_B$$

10. Energie libre F .

$$F = -k_B T \ln Z = -N k_B T \ln z$$

Donc

$$F = 3N k_B T \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) = 3N k_B T \ln(1 - e^{-\theta_E/T})$$

11. L'entropie du système S .

$$F = U - TS \Rightarrow S = \frac{U - F}{T}$$

D'où

$$S = 3N k_B \left\{ \frac{\theta_E/T}{e^{\theta_E/T} - 1} - \ln(1 - e^{-\theta_E/T}) \right\}$$