FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : PHYSIQUE STATISTIQUE

EXERCICE 01 : (05 *points*)

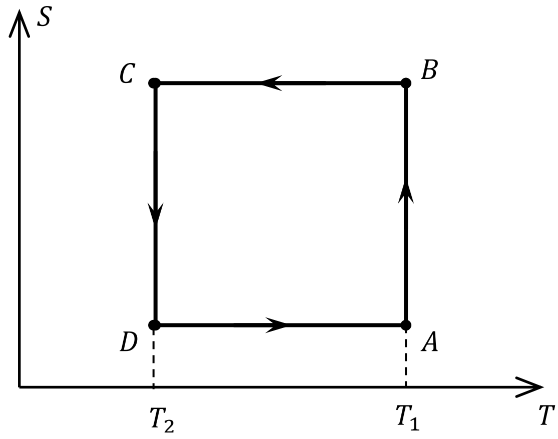
1.

$A \to B$: transformation isotherme de température T_1.

$B \to C$: transformation adiabatique.

$C \to D$: transformation isotherme de température $T_2 < T_1$.

$D \to A$: transformation adiabatique.



2. Plan (T, S) :

Isotherme : Température constante.

Adiabatique : $\delta Q = 0 \quad \Rightarrow \quad dS = \delta Q / T = 0$

Donc l'entropie est constante (Isentropique).

3. Echange de chaleur durant les parties isothermes du cycle :

<u>$A \to B$: transformation isotherme de température T_1.</u>

Gaz parfait monoatomique : $p.V = n.R.T$ et $U(T)$ est fonction uniquement de la température.

$$\boxed{\Delta U = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{W_A^B = -Q_A^B}$$

Pour calculer le travail entre deux état A et B, on utilise l'équation d'état $p.V = n.R.T$.
D'où

$$W_A^B = -\int_A^B p.dV = -n.R.T_1 \int_A^B \frac{1}{V} dV$$

Finalement

$$\boxed{Q_A^B = -W_A^B = n.R.T_1.\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)} \quad \text{la chaleur est absorbée } (V_B > V_A) \quad \Rightarrow \quad (Q_A^B > 0)$$

<u>$C \to D$: transformation isotherme de température $T_2 < T_1$.</u>
De la même manière

$$W_C^D = -\int_C^D p.dV = -n.R.T_2 \int_C^D \frac{1}{V} dV$$

Finalement

$$\boxed{Q_C^D = -W_C^D = n.R.T_2.\ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)} \quad \text{la chaleur est cédée} \quad (V_C > V_D) \quad \Rightarrow (Q_C^D < 0)$$

4. Entropie sur un cycle est nulle (variable d'état)

$$S_{\text{cycle}} = \Delta S_{A\to B} + \Delta S_{B\to C} + \Delta S_{C\to D} + \Delta S_{D\to A} = \Delta S_{A\to B} + \Delta S_{C\to D} = 0$$

$\Delta S_{B\to C} = \Delta S_{D\to A} = 0$ (Adiabatiques).

Donc

$$\Delta S_{A\to B} = -\Delta S_{C\to D}$$

Et

$$\frac{Q_A^B}{T_1} = -\frac{Q_C^D}{T_2} \qquad \Rightarrow \qquad n.R.\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -n.R.\ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$$

Finalement

$$\boxed{\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}}$$

5. Travail sur un cycle :

Comme U est une variable d'état, donc $\Delta U_{\text{cycle}} = Q_{\text{cycle}} + W_{\text{cycle}} = 0$ et $W_{\text{cycle}} = -Q_{\text{cycle}}$.

$$Q_{\text{cycle}} = Q_A^B + Q_B^C + Q_C^D + Q_B^C = Q_A^B + Q_C^D$$

$Q_B^C = Q_B^C = 0$ (Adiabatiques).

D'où

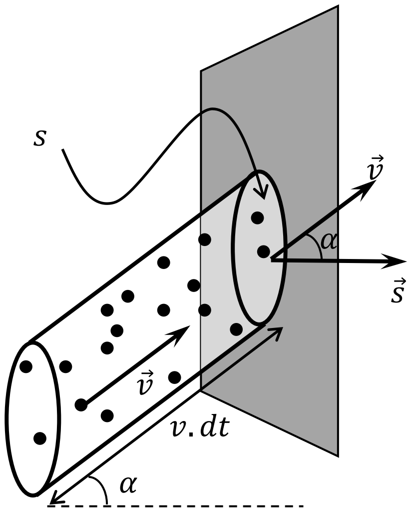
$$W_{\text{cycle}} = -Q_{\text{cycle}} = -n.R.\left[T_1.\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + T_2.\ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)\right]$$

$$\boxed{W_{\text{cycle}} = -n.R.(T_1 - T_2).\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}$$

Comme $(V_B > V_A) \Rightarrow \left(W_{\text{cycle}} < 0\right)$ le travail est cédé, c'est **<u>un moteur thermique</u>**.

<u>EXERCICE 02 :</u> (07 *points*)

1. D'après la figure ci-contre les particules ayant une vitesse $\vec{v}$ qui arrivent à la surface s du trou durant un intervalle de temps dt, sont contenues dans le prisme cylindrique de base s et de hauteur $v.\Delta t.\cos\alpha$, avec α est l'angle entre $\vec{s}$ et $\vec{v}$. D'où les molécules incidentes sont contenues dans un volume



$$d\tau = v.dt.\cos\alpha\,.s$$

Comme

$$v.\cos\alpha = \vec{v}\bullet\vec{e}_x = v_x$$

Alors

$$d\tau = v_x.dt.s$$

Le nombre de molécules contenues dans ce volume est obtenu en multipliant la densité volumique, considérée uniforme, par le volume

$$dN = \frac{N}{V}d\tau.f(\vec{v}).dv_x dv_y dv_z = \frac{N}{V}v_x.dt.s.f(\vec{v}).dv_x dv_y dv_z$$

La proportion de molécules ayant une vitesse $\vec{v}$ est donnée par le facteur de Maxwell–Boltzmann

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2}.e^{-\frac{m}{2.k_BT}\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}$$

Pour obtenir *le nombre de molécules du gaz qui traversent la surface* s *quelque soit leur vitesse* (à condition que $v_x > 0$) on intègre sur toutes les vitesses en respectant la condition précédente. Il vient que :

$$dN_s = \iiint \frac{N}{V}v_x.dt.s.\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2}.e^{-\frac{m}{2.k_BT}\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}dv_x dv_y dv_z$$

Et

$$dN_s = \frac{N}{V}dt.s\left\{\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x.\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2}.e^{-\frac{m}{2.k_BT}\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}dv_x dv_y dv_z\right\}$$

Comme

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x.\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{3/2}.e^{-\frac{m}{2.k_BT}\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}dv_x dv_y dv_z = \int_0^{+\infty} v_x.\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}.e^{-\frac{m}{2.k_BT}\left(v_x^2\right)}dv_x$$

Et

$$\int_0^{+\infty} v_x.\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}.e^{-\frac{m}{2.k_BT}\left(v_x^2\right)}dv_x = \left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\left[-\frac{k_BT}{m}e^{-\frac{m}{2.k_BT}\left(v_x^2\right)}\right]_0^{+\infty} = \left(\frac{k_BT}{2\pi.m}\right)^{1/2}$$

Alors :

$$\boxed{dN_s = \frac{N}{V}dt.s\left(\frac{k_BT}{2\pi.m}\right)^{1/2}}$$

2. La variation du nombre de particules dans l'enceinte :

$$dN = -dN_s = -\frac{N}{V}dt.s\left(\frac{k_BT}{2\pi.m}\right)^{1/2} = -\lambda.N.dt$$

Avec

$$\boxed{\lambda = \frac{s}{V}\left(\frac{k_B T}{2\pi.m}\right)^{1/2} = \frac{s}{V}\left(\frac{R.T}{2\pi.M}\right)^{1/2}}$$

Donc

$$\frac{dN}{N} = -\lambda.dt$$

En intégrant

$$\ln(N) = -\lambda.t + \mathrm{C^{te}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N(t) = N_0.\exp(-\lambda.t)}$$

N_0 est le nombre de particule initial dans l'enceinte $(t = 0)$.

3. Dans le cas d'un gaz parfait monoatomique .

$$pV = n.R.T \quad \text{ou} \quad pV = N.k_B.T$$

Comme V et T sont constant

$$p(t) = \frac{k_B.T}{V}N(t) = \frac{k_B.T}{V}N_0.\exp(-\lambda.t)$$

Ou

$$\boxed{p(t) = p_0.\exp(-\lambda.t)}$$

Avec

$$\boxed{p_0 = \frac{k_B.T}{V}N_0}$$

Est la pression initiale dans l'enceinte $(t = 0)$.

L'énergie

$$U = n.C_V.T = \frac{3}{2}R.n.T \qquad \text{ou} \qquad U(t) = \frac{3}{2}k_B.T.N(t)$$

Donc

$$\boxed{U(t) = U_0.\exp(-\lambda.t)}$$

Avec

$$\boxed{U_0 = \frac{3}{2}k_B.T.N_0}$$

Est l'énergie interne initiale dans l'enceinte $(t = 0)$.

EXERCICE 03: (08 *points*)

1. Normalisation de $f(v_x, v_y, v_z, \omega_1, \omega_2)$.

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty}\iint_{-\infty}^{+\infty} f(v_x, v_y, v_z, \omega_1, \omega_2) \times dv_x dv_y dv_z d\omega_1 d\omega_2 = 1$$

Donc

$$A\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_i^2} dv_i\right)^3 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I}{2}\omega_i^2} d\omega_i\right)^2 = 1$$

En utilisant $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}$.

$$A\left(\sqrt{\frac{2}{\beta m}}\sqrt{\pi}\right)^3 \left(\sqrt{\frac{2}{\beta I}}\sqrt{\pi}\right)^2 = 1$$

Donc

$$\boxed{A = \left(\frac{m}{2\pi. k_B T}\right)^{3/2}\left(\frac{I}{2\pi. k_B T}\right)}$$

2.

Calculons $\langle v_x \rangle$:

$$\langle v_x \rangle = \left\{\left(\frac{m}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x. e^{-\frac{\beta m}{2}v_x^2} dv_x\right\} \times \left\{\left(\frac{m}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_y^2} dv_y\right\} \times \left\{\left(\frac{m}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_z^2} dv_z\right\}$$
$$\times \left\{\left(\frac{I}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I}{2}\omega_1^2} d\omega_1\right\} \times \left\{\left(\frac{I}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I}{2}\omega_2^2} d\omega_2\right\}$$

Donc

$$\langle v_x \rangle = \left(\frac{m}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x. e^{-\frac{\beta m}{2}v_x^2} dv_x = \left(\frac{m}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2}\left(\frac{-1}{\beta m}\right)\left[e^{-\frac{\beta m}{2}v_x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

Donc

$$\boxed{\langle v_x \rangle = 0}$$

De la même manière :

$$\boxed{\langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\langle \vec{v} \rangle = \vec{0}}$$

Calculons $\langle \omega_1 \rangle$:

$$\langle \omega_1 \rangle = \left\{\left(\frac{m}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_x^2} dv_x\right\} \times \left\{\left(\frac{m}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_y^2} dv_y\right\} \times \left\{\left(\frac{m}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_z^2} dv_z\right\}$$
$$\times \left\{\left(\frac{I}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1. e^{-\frac{\beta I}{2}\omega_1^2} d\omega_1\right\} \times \left\{\left(\frac{I}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I}{2}\omega_2^2} d\omega_2\right\}$$

Donc

$$\langle \omega_1 \rangle = \left(\frac{I}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1. e^{-\frac{\beta I}{2}\omega_1^2} d\omega_1 = \left(\frac{I}{2\pi. k_B T}\right)^{1/2}\left(\frac{-1}{\beta I}\right)\left[e^{-\frac{\beta I}{2}\omega_1^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

Donc

$$\boxed{\langle \omega_1 \rangle = 0}$$

De la même manière :

$$\boxed{\langle \omega_2 \rangle = 0} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\langle \vec{\omega} \rangle = \vec{0}}$$

3.

Calculons $\langle v_x^2 \rangle$:

$$\langle v_x^2 \rangle = \left\{\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2.e^{-\frac{\beta m}{2}v_x^2}dv_x\right\}\times\left\{\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_y^2}dv_y\right\}\times\left\{\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_z^2}dv_z\right\}$$
$$\times\left\{\left(\frac{I}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I}{2}\omega_1^2}d\omega_1\right\}\times\left\{\left(\frac{I}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I}{2}\omega_2^2}d\omega_2\right\}$$

Donc

$$\langle v_x^2 \rangle = \left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2.e^{-\frac{\beta m}{2}v_x^2}dv_x = \left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{\beta m}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\tau^2.e^{-\tau^2}d\tau$$

Comme on a calculé (par parties) $\int_{-\infty}^{+\infty}\tau^2.e^{-\tau^2}d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Donc

$$\boxed{\langle v_x^2 \rangle = \left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{\beta m}\right)^{3/2}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{k_BT}{m}}$$

De la même manière :

$$\boxed{\langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{k_BT}{m}}$$

Calculons $\langle \omega_1^2 \rangle$:

$$\langle \omega_1^2 \rangle = \left\{\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_x^2}dv_x\right\}\times\left\{\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_y^2}dv_y\right\}\times\left\{\left(\frac{m}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2}v_z^2}dv_z\right\}$$
$$\times\left\{\left(\frac{I}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1^2.e^{-\frac{\beta I}{2}\omega_1^2}d\omega_1\right\}\times\left\{\left(\frac{I}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I}{2}\omega_2^2}d\omega_2\right\}$$

Donc

$$\langle \omega_1^2 \rangle = \left(\frac{I}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1^2.e^{-\frac{\beta I}{2}\omega_1^2}d\omega_1 = \left(\frac{I}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{\beta I}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\tau^2.e^{-\tau^2}d\tau$$

Comme on a calculé (par parties) $\int_{-\infty}^{+\infty}\tau^2.e^{-\tau^2}d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Donc

$$\boxed{\langle \omega_1^2 \rangle = \left(\frac{I}{2\pi.k_BT}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{\beta I}\right)^{3/2}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{k_BT}{I}}$$

De la même manière :

$$\boxed{\langle \omega_2^2 \rangle = \frac{k_BT}{I}}$$

4. L'énergie moyenne d'une particule est égale à son énergie cinétique moyenne. L'énergie interne de N particules est égale à :

$$U = N\langle E_c \rangle = N\frac{1}{2}m\{\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle\} + N\frac{1}{2}I\{\langle \omega_1^2 \rangle + \langle \omega_2^2 \rangle\}$$

Donc

$$\boxed{U = N\langle E_c \rangle = \frac{5}{2}Nk_BT}$$

5. Capacité calorifique à volume constant.

$$\boxed{C_V = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_V = \frac{5}{2}Nk_B}$$

Pour une mole de particules $N = \mathcal{N}_A$ la capacité calorifique molaire $C_V = \frac{5}{2}R$