

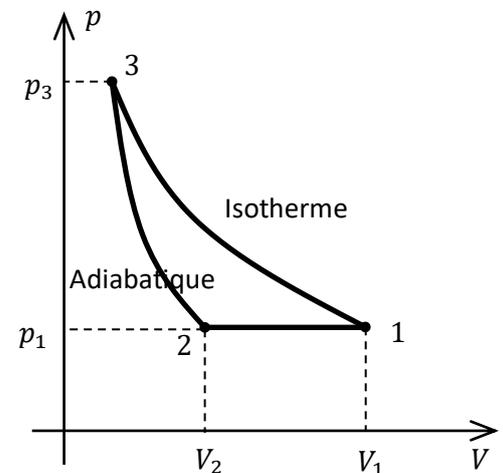
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE
 MODULE : PHYSIQUE STATISTIQUE.

EXERCICE 01: (08 points)**1. Contraintes.**

Transformation 1 → 2 : refroidissement à pression constante.
 Contrainte : Cylindre fermé par un piston étanche et libre.

Transformation 2 → 3 : compression adiabatique.
 Contrainte : Enceinte (cylindre et piston) calorifugée.

Transformation 3 → 1 : détente isotherme.
 Contrainte : Le système est placé dans un réservoir thermique (thermostat) en assurant un bon contact thermique.

**2. Transformation adiabatique dans le cas d'un gaz parfait.**

$$dU = n \cdot C_V \cdot dT \quad ; \quad \delta Q = 0 \quad ; \quad \delta W = -p \cdot dV$$

En écrivant le premier principe, on a :

$$n \cdot C_V \cdot dT + p \cdot dV = 0$$

Pour un gaz parfait $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$, on remplace la pression dans l'équation précédente :

$$C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} = 0$$

D'autre part, en prenant la différentielle du logarithme népérien de l'équation d'état :

$$\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V}$$

En remplaçant dans ce qui précède, on trouve :

$$C_V \frac{dp}{p} + (R + C_V) \frac{dV}{V} = 0$$

Ou

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \quad \text{avec} \quad \boxed{\gamma = \frac{R + C_V}{C_V} = \frac{C_p}{C_V}}$$

Qui s'intègre, comme suit

$$\ln p + \ln V^\gamma = \ln p \cdot V^\gamma = \text{Cte} \quad \Rightarrow \quad \boxed{pV^\gamma = \text{constante}}$$

Dans le cas d'un gaz parfait monoatomique

$$C_V = \frac{3}{2}R \quad ; \quad C_p = R + C_V = \frac{5}{2}R \quad \text{donc} \quad \boxed{\gamma = \frac{5}{3}}$$

3. Pressions p_1 et p_3 et volume V_2 du gaz parfait.

L'équation d'état (pour une mole de gaz parfait) : $p_1 \cdot V_1 = R \cdot T_1 \Rightarrow \boxed{p_1 = R \cdot T_1 / V_1}$

La transformation 1 → 2 est isobare donc $p_2 = p_1$, et de l'équation d'état : $p_2 \cdot V_2 = R \cdot T_2$

Donc
$$V_2 = R \cdot T_2 / p_2 = R \cdot T_2 / p_1$$

En remplaçant p_1 on trouve :
$$\boxed{V_2 = V_1 \cdot T_2 / T_1}$$

La transformation 3 \rightarrow 1 est isotherme donc $T_3 = T_1$, et de l'équation d'état : $p_3 \cdot V_3 = R \cdot T_3$

Donc
$$p_3 = R \cdot T_3 / V_3 \quad \text{et} \quad \boxed{p_3 = R \cdot T_1 / V_3}$$

4. Echange de chaleur durant les parties du cycle (pour une mole de gaz parfait $n = 1$) :

Transformation 1 \rightarrow 2 : refroidissement isobare.

$$\delta Q = n \cdot C_p \cdot dT \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_1^2 = C_p \cdot \Delta T = \frac{5}{2} R \cdot (T_2 - T_1)}$$

Transformation 2 \rightarrow 3 : compression adiabatique.

$$\delta Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_2^3 = 0}$$

Transformation 3 \rightarrow 1 : détente isotherme.

$$dU = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta Q = -\delta W = p \cdot dV \quad \Rightarrow \quad Q_3^1 = \int_3^1 p \cdot dV$$

En utilisant l'équation d'état ($T = \text{constante}$)

$$Q_3^1 = \int_3^1 RT \frac{dV}{V} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_3^1 = RT_1 \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right)}$$

Travail durant les parties du cycle (pour une mole de gaz parfait $n = 1$) :

Transformation 1 \rightarrow 2 : refroidissement isobare.

$$\delta W = -p \cdot dV \quad \Rightarrow \quad W_1^2 = - \int_1^2 p \cdot dV \quad (p = \text{constante})$$

Donc

$$W_1^2 = -p_1 \cdot (V_2 - V_1) \quad \text{ou} \quad \boxed{W_1^2 = R \cdot (T_1 - T_2)} \quad (p_2 = p_1)$$

Transformation 2 \rightarrow 3 : compression adiabatique.

$$\delta Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta W = dU = n \cdot C_v \cdot dT \quad \text{et} \quad \boxed{W_2^3 = C_v \cdot \Delta T = \frac{3}{2} R \cdot (T_1 - T_2)} \quad (T_3 = T_1)$$

Transformation 3 \rightarrow 1 : détente isotherme.

$$\delta W = -p \cdot dV \quad \Rightarrow \quad W_3^1 = - \int_3^1 p \cdot dV$$

En utilisant l'équation d'état ($T = \text{constante}$)

$$W_3^1 = - \int_3^1 RT \frac{dV}{V} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_3^1 = RT_1 \cdot \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right)}$$

5. Pour le cycle complet.

$$Q_{\text{cycle}} = Q_1^2 + Q_2^3 + Q_3^1 = \frac{5}{2} R \cdot (T_2 - T_1) + RT_1 \cdot \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right)$$

$$W_{\text{cycle}} = W_1^2 + W_2^3 + W_3^1 = R \cdot (T_1 - T_2) + \frac{3}{2} R \cdot (T_1 - T_2) + RT_1 \cdot \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right)$$

On remarque que :

$$\boxed{Q_{\text{cycle}} = -W_{\text{cycle}}}$$

6. Variation de l'énergie interne du gaz parfait.

$$\Delta U_{1 \rightarrow 2} = U_2 - U_1 = Q_1^2 + W_1^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta U_{1 \rightarrow 2} = \frac{3}{2} R \cdot (T_2 - T_1)}$$

$$\Delta U_{2 \rightarrow 3} = U_3 - U_2 = Q_2^3 + W_2^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta U_{2 \rightarrow 3} = \frac{3}{2} R \cdot (T_1 - T_2)}$$

$$\Delta U_{3 \rightarrow 1} = U_1 - U_3 = Q_3^1 + W_3^1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta U_{3 \rightarrow 1} = 0}$$

Et $\boxed{\Delta U_{\text{cycle}} = Q_{\text{cycle}} + W_{\text{cycle}} = 0}$ ou $\Delta U_{\text{cycle}} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \Delta U_{3 \rightarrow 1} = 0$

7. Variation d'entropie du gaz parfait (pour une mole de gaz parfait $n = 1$).

Transformation 1 \rightarrow 2 : refroidissement isobare.

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = n \cdot C_p \frac{dT}{T} \quad \Rightarrow \quad \Delta S_{1 \rightarrow 2} = C_p \int_1^2 \frac{dT}{T} \quad \text{donc} \quad \boxed{\Delta S_{1 \rightarrow 2} = C_p \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{5}{2} R \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}$$

Transformation 2 \rightarrow 3 : compression adiabatique.

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta S_{2 \rightarrow 3} = 0}$$

Transformation 3 \rightarrow 1 : détente isotherme.

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad (T = \text{constante}) \quad \Rightarrow \quad \Delta S_{3 \rightarrow 1} = \frac{Q_3^1}{T_1} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta S_{3 \rightarrow 1} = R \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right)}$$

Et pour le cycle complet

$$\Delta S_{\text{cycle}} = \Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 1} = \frac{5}{2} R \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + R \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right)$$

Or en utilisant l'équation d'état

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = \frac{V_2}{V_1} \quad (p_2 = p_1)$$

D'où

$$\Delta S_{\text{cycle}} = \frac{5}{2} R \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + R \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right) = R \ln\left(\left(\frac{V_1}{V_3}\right) \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{5/2}\right)$$

Or

La transformation 1 \rightarrow 2 est isobare $\Rightarrow p_1 = p_2$

La transformation 2 \rightarrow 3 est adiabatique $\Rightarrow p_2 \cdot V_2^\gamma = p_3 \cdot V_3^\gamma$

La transformation 3 \rightarrow 1 est isotherme $\Rightarrow p_1 V_1 = p_3 V_3$

En divisant les deux dernières équations (et en remplaçant p_2) :

$$\frac{V_2^\gamma}{V_1^\gamma} = V_3^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma = \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1} \quad \text{et} \quad \frac{V_3}{V_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Comme

$$\gamma = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_3}{V_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{5/2} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta S_{\text{cycle}} = 0}$$

8. Le rendement moteur.

$$\eta = \left| \frac{W_{\text{cycle}}}{Q_3^1} \right| = \left| \frac{\frac{5}{2} R \cdot (T_1 - T_2) - RT_1 \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right)}{RT_1 \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right)} \right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta = 1 - \frac{3(1 - T_2/T_1)}{2 \cdot \ln(V_1/V_3)}}$$

EXERCICE 02:

Modèle à trois niveaux (08 points)

$$\epsilon_{-1} = -\epsilon \quad ; \quad \epsilon_0 = 0 \quad ; \quad \epsilon_{+1} = +\epsilon \quad \text{avec} \quad \epsilon > 0$$

1. Calcul de la fonction de partition canonique
- z
- d'une seule molécule.

$$z = \sum_i e^{-\beta \epsilon_i}$$

En remplaçant :

$$z = e^{+\beta \epsilon} + 1 + e^{-\beta \epsilon} = 1 + 2 \cdot \cosh(\beta \epsilon)$$

Fonction de partition canonique Z correspondant à N particules identiques et discernables.

$$Z = z^N = (1 + 2 \cdot \cosh(\beta \epsilon))^N$$

2. Energie interne du système
- U
- .

$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -N \frac{\partial \ln z}{\partial \beta} \quad \text{donc} \quad U = -2N\epsilon \frac{\sinh(\beta \epsilon)}{1 + 2 \cdot \cosh(\beta \epsilon)}$$

3. Capacité calorifique à volume constant.

$$C_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V = \frac{\partial U}{\partial \beta} \left. \frac{\partial \beta}{\partial T} \right|_V \Rightarrow C_V = -\frac{1}{k_B T^2} \left. \frac{\partial U}{\partial \beta} \right|_V$$

Donc

$$C_V = \frac{2N\epsilon^2 \cosh(\beta \epsilon) \cdot (1 + 2 \cdot \cosh(\beta \epsilon)) - 2 \cdot \sinh^2(\beta \epsilon)}{k_B T^2 (1 + 2 \cdot \cosh(\beta \epsilon))^2} \Rightarrow C_V = 2Nk_B (\beta \epsilon)^2 \frac{2 + \cosh(\beta \epsilon)}{(1 + 2 \cdot \cosh(\beta \epsilon))^2}$$

4. Energie libre
- F
- .

$$F = -k_B T \cdot \ln Z = -Nk_B T \cdot \ln z$$

Donc

$$F = -Nk_B T \cdot \ln(1 + 2 \cdot \cosh(\epsilon/k_B T))$$

5. Entropie.

$$S = \frac{U - F}{T} = Nk_B \left\{ \ln(1 + 2 \cdot \cosh(\epsilon/k_B T)) - 2 \frac{\epsilon}{k_B T} \frac{\sinh(\epsilon/k_B T)}{1 + 2 \cdot \cosh(\epsilon/k_B T)} \right\}$$

6. Probabilités canoniques.

$$P(\epsilon_i) = \frac{1}{z} e^{-\beta \epsilon_i}$$

D'où

$$P_{-1} = \frac{e^{+\beta \epsilon}}{1 + 2 \cdot \cosh(\beta \epsilon)} \quad ; \quad P_0 = \frac{1}{1 + 2 \cdot \cosh(\beta \epsilon)} \quad ; \quad P_{+1} = \frac{e^{-\beta \epsilon}}{1 + 2 \cdot \cosh(\beta \epsilon)}$$

Quand $T \rightarrow 0$: $\beta \rightarrow +\infty \Rightarrow e^{-\beta \epsilon} \approx 0$; $\cosh(\beta \epsilon) \approx e^{+\beta \epsilon}/2$ et $e^{+\beta \epsilon} \gg 1$ Dans ce cas : $P_{-1} \approx 1$; $P_0 \approx 0$; $P_{+1} \approx 0$ Toutes les particules vont occuper l'état de plus faible énergie ($-\epsilon$).Quand $T \rightarrow +\infty$: $\beta \rightarrow 0 \Rightarrow e^{-\beta \epsilon} \approx 1$; $e^{+\beta \epsilon} \approx 1$; $\cosh(\beta \epsilon) \approx 1$ Dans ce cas : $P_{-1} \approx 1/3$; $P_0 \approx 1/3$; $P_{+1} \approx 1/3$

Les particules vont se répartir de façon équiprobable sur tous les niveaux d'énergie.

Modèle à $(2n + 1)$ niveaux (04 points)

$$\epsilon_p = p \cdot \epsilon \quad \text{où} \quad -n \leq p \leq +n \quad \text{est un entier relatif}$$

7. Calcul de la fonction de partition canonique z d'une seule molécule.

$$z = \sum_{p=-n}^{p=n} e^{-\beta \epsilon_p} = \sum_{p=-n}^{p=n} e^{-p\beta \epsilon}$$

En développant

$$z = e^{+n\beta \epsilon} + e^{+(n-1)\beta \epsilon} + \dots + e^{+\beta \epsilon} + 1 + e^{-\beta \epsilon} + \dots + e^{-(n-1)\beta \epsilon} + e^{-n\beta \epsilon}$$

Nous avons deux sommes de la forme $1 + x + \dots + x^n$ en utilisant

$$1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Nous avons donc

$$z = \frac{1 - (e^{+\beta \epsilon})^{n+1}}{1 - e^{+\beta \epsilon}} + \frac{1 - (e^{-\beta \epsilon})^{n+1}}{1 - e^{-\beta \epsilon}} - 1$$

En réduisant au même dénominateur commun

$$z = \frac{(1 - e^{+(n+1)\beta \epsilon})(1 - e^{-\beta \epsilon}) + (1 - e^{-(n+1)\beta \epsilon})(1 - e^{+\beta \epsilon})}{(1 - e^{+\beta \epsilon})(1 - e^{-\beta \epsilon})} - 1$$

En développant

$$z = \frac{1 - e^{+(n+1)\beta \epsilon} - e^{-\beta \epsilon} + e^{+n\beta \epsilon} + 1 - e^{-(n+1)\beta \epsilon} - e^{+\beta \epsilon} + e^{-n\beta \epsilon}}{1 - e^{+\beta \epsilon} - e^{-\beta \epsilon} + 1} - 1$$

Donc

$$z = \frac{2 - 2 \cdot \cosh((n+1)\beta \epsilon) + 2 \cdot \cosh(n\beta \epsilon) - 2 \cdot \cosh(\beta \epsilon)}{2 - 2 \cdot \cosh(\beta \epsilon)} - 1$$

Et

$$z = \frac{1 - \cosh((n+1)\beta \epsilon) + \cosh(n\beta \epsilon) - \cosh(\beta \epsilon)}{1 - \cosh(\beta \epsilon)} - 1 = -\frac{\cosh((n+1)\beta \epsilon) - \cosh(n\beta \epsilon)}{1 - \cosh(\beta \epsilon)}$$

En utilisant : $\cosh(a) - \cosh(b) = 2 \sinh\left(\frac{a+b}{2}\right) \sinh\left(\frac{a-b}{2}\right)$ avec $1 = \cosh(0)$

$$z = \frac{2 \sinh((2n+1)\beta \epsilon/2) \sinh(\beta \epsilon/2)}{2 \sinh(\beta \epsilon/2) \sinh(\beta \epsilon/2)}$$

Finalement

$$z = \frac{\sinh((2n+1)\beta \epsilon/2)}{\sinh(\beta \epsilon/2)}$$

8. Energie interne du système U .

$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -N \frac{\partial \ln z}{\partial \beta}$$

Donc :

$$U = -N \left((2n+1) \frac{\epsilon \cosh((2n+1)\beta \epsilon/2)}{2 \sinh((2n+1)\beta \epsilon/2)} - \frac{\epsilon \cosh(\beta \epsilon/2)}{2 \sinh(\beta \epsilon/2)} \right)$$

Et

$$U = \frac{N\epsilon}{2} (\cotanh(\beta \epsilon/2) - (2n+1) \cotanh((2n+1)\beta \epsilon/2))$$