

**CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE**

MODULE : PHYSIQUE STATISTIQUE.

**EXERCICE 01: (10 points)****1. Pour un gaz parfait.**

$$dU = n \cdot C_V \cdot dT \quad \text{et} \quad pV = nR \cdot T$$

Lors d'une transformation isobare :

$$dU = \delta Q + \delta W = \delta Q - p \cdot dV$$

Avec

$$\delta Q = n \cdot C_p \cdot dT$$

En remplaçant

$$n \cdot C_V \cdot dT = n \cdot C_p \cdot dT - p \cdot dV$$

En prenant la différentielle de l'équation d'état avec ( $p = \text{constante}$ )

$$p \cdot dV = nR \cdot dT$$

D'où

$$n \cdot C_V \cdot dT = n \cdot C_p \cdot dT - nR \cdot dT$$

Ce qui donne

$$C_V = C_p - R \quad \text{ou} \quad \boxed{C_p = C_V + R}$$

**2. Diagramme de Clapeyron.****3. Echange de chaleur durant les parties du cycle**(Pour une mole de gaz parfait  $n = 1$ ) :Transformation 1  $\rightarrow$  2 : Compression adiabatique.

$$\delta Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_1^2 = 0}$$

Transformation 2  $\rightarrow$  3 : Chauffage isochore.

$$\delta Q = n \cdot C_V \cdot dT \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_2^3 = C_V \cdot \Delta T = C_V \cdot (T_3 - T_2)}$$

Transformation 3  $\rightarrow$  4 : Détente adiabatique.

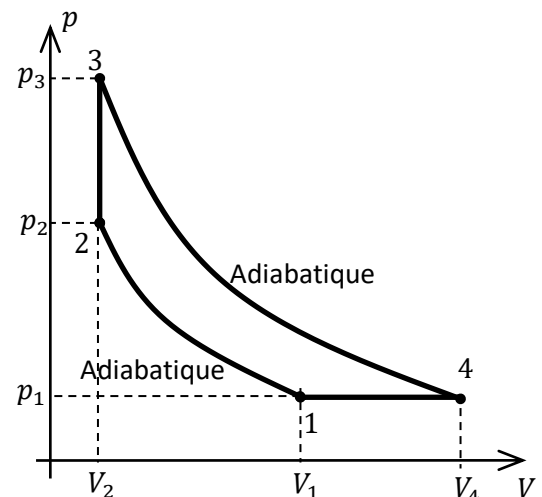
$$\delta Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_3^4 = 0}$$

Transformation 4  $\rightarrow$  1 : Refroidissement isobare.

$$\delta Q = n \cdot C_p \cdot dT \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_4^1 = C_p \cdot \Delta T = C_p \cdot (T_1 - T_4)}$$

**Et pour un cycle complet**

$$\boxed{Q_{\text{cycle}} = Q_1^2 + Q_2^3 + Q_3^4 + Q_4^1 = C_V \cdot (T_3 - T_2) + C_p \cdot (T_1 - T_4)}$$



**Travail durant les parties du cycle** (pour une mole de gaz parfait  $n = 1$ ) :

Transformation 1  $\rightarrow$  2 : Compression adiabatique.

$$\delta Q = 0 \quad \Rightarrow \quad dU = n \cdot C_V \cdot dT = \delta W \quad \text{donc} \quad \boxed{W_1^2 = C_V \cdot \Delta T = C_V \cdot (T_2 - T_1)}$$

Transformation 2  $\rightarrow$  3 : Chauffage isochore. ( $V = \text{constante}$ )

$$\delta W = -p \cdot dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_2^3 = 0}$$

Transformation 3  $\rightarrow$  4 : Détente adiabatique.

$$\delta Q = 0 \quad \Rightarrow \quad dU = n \cdot C_V \cdot dT = \delta W \quad \text{donc} \quad \boxed{W_3^4 = C_V \cdot \Delta T = C_V \cdot (T_4 - T_3)}$$

Transformation 4  $\rightarrow$  1 : Refroidissement isobare. ( $p = \text{constante}$ )

$$\delta W = -p \cdot dV = -nR \cdot dT \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_4^1 = -R \cdot \Delta T = -R \cdot (T_1 - T_4)}$$

**Et pour un cycle complet**

$$W_{\text{cycle}} = W_1^2 + W_2^3 + W_3^4 + W_4^1 = C_V \cdot (T_2 - T_1) + C_V \cdot (T_4 - T_3) - R \cdot (T_1 - T_4)$$

$$W_{\text{cycle}} = C_V \cdot (T_2 - T_3) + C_V \cdot (T_4 - T_1) - R \cdot (T_1 - T_4) = C_V \cdot (T_2 - T_3) - (C_V + R) \cdot (T_1 - T_4)$$

Et

$$\boxed{W_{\text{cycle}} = C_V \cdot (T_2 - T_3) - C_p \cdot (T_1 - T_4)}$$

On voit bien que

$$\boxed{Q_{\text{cycle}} = -W_{\text{cycle}}}$$

#### 4. Variation d'entropie du gaz parfait (transformation réversible).

Transformation 1  $\rightarrow$  2 : Compression adiabatique.

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta S_{1 \rightarrow 2} = 0}$$

Transformation 2  $\rightarrow$  3 : Chauffage isochore.

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = n \cdot C_V \frac{dT}{T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta S_{2 \rightarrow 3} = C_V \cdot \ln \left( \frac{T_3}{T_2} \right)}$$

Transformation 3  $\rightarrow$  4 : Détente adiabatique.

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta S_{3 \rightarrow 4} = 0}$$

Transformation 4  $\rightarrow$  1 : Refroidissement isobare.

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = n \cdot C_p \frac{dT}{T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta S_{4 \rightarrow 1} = C_p \cdot \ln \left( \frac{T_1}{T_4} \right)}$$

**Et pour le cycle complet**

$$\Delta S_{\text{cycle}} = \Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 4} + \Delta S_{4 \rightarrow 1} = C_V \cdot \ln \left( \frac{T_3}{T_2} \right) + C_p \cdot \ln \left( \frac{T_1}{T_4} \right)$$

Ou

$$\Delta S_{\text{cycle}} = C_V \cdot \left( \ln \left( \frac{T_3}{T_2} \right) + \gamma \cdot \ln \left( \frac{T_1}{T_4} \right) \right) = C_V \cdot \ln \left( \frac{T_3}{T_2} \frac{T_1^\gamma}{T_4^\gamma} \right)$$

Or la transformation  $1 \rightarrow 2$  est adiabatique :  $p_1 \cdot V_1^\gamma = p_2 \cdot V_2^\gamma$

Et la transformation  $3 \rightarrow 4$  est adiabatique :  $p_4 \cdot V_4^\gamma = p_3 \cdot V_3^\gamma$

Puisque la transformation  $4 \rightarrow 1$  est isobare :  $p_1 = p_4$

Et puisque la transformation  $2 \rightarrow 3$  est isotherme :  $V_2 = V_3$

En divisant les deux premières équations

$$\frac{p_1 \cdot V_1^\gamma}{p_4 \cdot V_4^\gamma} = \frac{p_2 \cdot V_2^\gamma}{p_3 \cdot V_3^\gamma} \Rightarrow \frac{V_1^\gamma}{V_4^\gamma} = \frac{p_2}{p_3}$$

Or en utilisant l'équation d'état, avec ( $V_2 = V_3$ )

$$\frac{p_2 V_2}{p_3 V_3} = \frac{nR \cdot T_2}{nR \cdot T_3} \Rightarrow \frac{p_2}{p_3} = \frac{T_2}{T_3}$$

Et en utilisant l'équation d'état, avec ( $p_1 = p_4$ )

$$\left( \frac{p_1 V_1}{p_4 V_4} \right)^\gamma = \left( \frac{nR \cdot T_1}{nR \cdot T_4} \right)^\gamma \Rightarrow \frac{V_1^\gamma}{V_4^\gamma} = \frac{T_1^\gamma}{T_4^\gamma}$$

D'où

$$\frac{T_1^\gamma}{T_4^\gamma} = \frac{T_2}{T_3} \quad \text{ou bien} \quad \frac{T_3}{T_2} \frac{T_1^\gamma}{T_4^\gamma} = 1$$

Ce qui donne la variation d'entropie sur le cycle :

$$\boxed{\Delta S_{\text{cycle}} = 0}$$

##### 5. Le rendement moteur.

$$\eta = \left| \frac{W_{\text{Cycle}}}{Q_2^3} \right| = \left| \frac{C_V \cdot (T_2 - T_3) - C_p \cdot (T_1 - T_4)}{C_V \cdot (T_3 - T_2)} \right| \Rightarrow \eta = \left| \gamma \frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2)} - 1 \right|$$

Mais puisque  $W_{\text{Cycle}} < 0$  car c'est un cycle moteur et  $Q_2^3 > 0$  car c'est la chaleur fournie au gaz. La valeur  $W_{\text{Cycle}}/Q_2^3$  est négative. Donc

$$\boxed{\eta = 1 - \gamma \frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2)}}$$

**EXERCICE 02: (10 points)**

1. **Un gaz est considéré comme parfait** dans la mesure où molécules qui le composent n'interagissent pas entre elles. Leur énergie potentielle sera donc nulle et l'énergie totale de chaque particule sera égale à son énergie cinétique. Comme l'énergie cinétique des molécules exprime la température du gaz, alors dans ce cas, l'énergie interne du gaz (qui est la somme des énergies totales de ces molécules) ne dépend que de la température.
2. **On peut assimiler un gaz réel à un gaz parfait** dans le cas où ses composants (atomes ou molécules) sont très éloignées les uns des autres, ce qui est réalisé pour des gaz dilués c'est-à-dire pour de faibles pressions.

**3. Normalisation de  $f(v_x, v_y, v_z, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ .**

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \iint_{-\infty}^{+\infty} f(v_x, v_y, v_z, \omega_1, \omega_2) \times dv_x dv_y dv_z d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 = 1$$

Donc

$$A \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2} v_i^2} dv_i \right)^3 \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I_1}{2} \omega_1^2} d\omega_1 \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I_2}{2} \omega_2^2} d\omega_2 \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I_3}{2} \omega_3^2} d\omega_3 \right) = 1$$

En utilisant  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}$ .

$$A \left( \sqrt{\frac{2}{\beta m}} \sqrt{\pi} \right)^3 \left( \sqrt{\frac{2}{\beta I_1}} \sqrt{\pi} \right) \left( \sqrt{\frac{2}{\beta I_2}} \sqrt{\pi} \right) \left( \sqrt{\frac{2}{\beta I_3}} \sqrt{\pi} \right) = 1$$

Donc

$$A = \frac{\sqrt{m^3 \cdot I_1 I_2 I_3}}{(2\pi \cdot k_B T)^{3/2}}$$

**4. Calculons  $\langle v_x \rangle$  :**

$$\begin{aligned} \langle v_x \rangle &= \left\{ \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x \cdot e^{-\frac{\beta m}{2} v_x^2} dv_x \right\} \times \left\{ \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2} v_y^2} dv_y \right\} \\ &\quad \times \left\{ \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2} v_z^2} dv_z \right\} \times \left\{ \left( \frac{I_1}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I_1}{2} \omega_1^2} d\omega_1 \right\} \\ &\quad \times \left\{ \left( \frac{I_2}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I_2}{2} \omega_2^2} d\omega_2 \right\} \times \left\{ \left( \frac{I_3}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I_3}{2} \omega_3^2} d\omega_3 \right\} \end{aligned}$$

Donc

$$\langle v_x \rangle = \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x \cdot e^{-\frac{\beta m}{2} v_x^2} dv_x = \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \left( \frac{-1}{\beta m} \right) \left[ e^{-\frac{\beta m}{2} v_x^2} \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

Donc

$$\langle v_x \rangle = 0$$

De la même manière :

$$\langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \vec{v} \rangle = \vec{0}$$

Calculons  $\langle \omega_1 \rangle$ .

$$\begin{aligned} \langle \omega_1 \rangle = & \left\{ \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2} v_x^2} dv_x \right\} \times \left\{ \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2} v_y^2} dv_y \right\} \\ & \times \left\{ \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2} v_z^2} dv_z \right\} \times \left\{ \left( \frac{I_1}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1 \cdot e^{-\frac{\beta I_1}{2} \omega_1^2} d\omega_1 \right\} \\ & \times \left\{ \left( \frac{I_2}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I_2}{2} \omega_2^2} d\omega_2 \right\} \times \left\{ \left( \frac{I_3}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I_3}{2} \omega_3^2} d\omega_3 \right\} \end{aligned}$$

Donc

$$\langle \omega_1 \rangle = \left( \frac{I}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1 \cdot e^{-\frac{\beta I}{2} \omega_1^2} d\omega_1 = \left( \frac{I}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \left( \frac{-1}{\beta I} \right) \left[ e^{-\frac{\beta I}{2} \omega_1^2} \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

Donc

$$\boxed{\langle \omega_1 \rangle = 0}$$

De la même manière :

$$\boxed{\langle \omega_2 \rangle = \langle \omega_3 \rangle = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\langle \vec{\omega} \rangle = \vec{0}}$$

5. Calculons  $\langle v_x^2 \rangle$ .

$$\begin{aligned} \langle v_x^2 \rangle = & \left\{ \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \cdot e^{-\frac{\beta m}{2} v_x^2} dv_x \right\} \times \left\{ \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2} v_y^2} dv_y \right\} \\ & \times \left\{ \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2} v_z^2} dv_z \right\} \times \left\{ \left( \frac{I_1}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I_1}{2} \omega_1^2} d\omega_1 \right\} \\ & \times \left\{ \left( \frac{I_2}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I_2}{2} \omega_2^2} d\omega_2 \right\} \times \left\{ \left( \frac{I_3}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I_3}{2} \omega_3^2} d\omega_3 \right\} \end{aligned}$$

Donc

$$\langle v_x^2 \rangle = \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \cdot e^{-\frac{\beta m}{2} v_x^2} dv_x$$

En utilisant  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-a \cdot x^2} dx = \sqrt{\pi}/2a^{3/2}$  avec  $a = \beta m/2$ .

Donc

$$\langle v_x^2 \rangle = \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \left( \frac{2}{\beta m} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{et} \quad \boxed{\langle v_x^2 \rangle = \frac{k_B T}{m}}$$

De la même manière :

$$\boxed{\langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{k_B T}{m}}$$

Calculons  $\langle \omega_1^2 \rangle$ .

$$\begin{aligned} \langle \omega_1^2 \rangle = & \left\{ \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2} v_x^2} dv_x \right\} \times \left\{ \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2} v_y^2} dv_y \right\} \\ & \times \left\{ \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m}{2} v_z^2} dv_z \right\} \times \left\{ \left( \frac{I_1}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1^2 \cdot e^{-\frac{\beta I_1}{2} \omega_1^2} d\omega_1 \right\} \\ & \times \left\{ \left( \frac{I_2}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I_2}{2} \omega_2^2} d\omega_2 \right\} \times \left\{ \left( \frac{I_3}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta I_3}{2} \omega_3^2} d\omega_3 \right\} \end{aligned}$$

Donc

$$\langle \omega_1^2 \rangle = \left( \frac{I_1}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1^2 \cdot e^{-\frac{\beta I_1}{2} \omega_1^2} d\omega_1$$

En utilisant  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-a \cdot x^2} dx = \sqrt{\pi}/2a^{3/2}$  avec  $a = \beta m/2$ .

Donc

$$\langle \omega_1^2 \rangle = \left( \frac{I_1}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \left( \frac{2}{\beta I_1} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{et} \quad \boxed{\langle \omega_1^2 \rangle = \frac{k_B T}{I_1}}$$

De la même manière :

$$\boxed{\langle \omega_2^2 \rangle = \frac{k_B T}{I_2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\langle \omega_3^2 \rangle = \frac{k_B T}{I_3}}$$

6. L'énergie moyenne d'une particule est égale à son énergie cinétique moyenne. L'énergie interne de N particules est égale à :

$$U = N \langle E_c \rangle = N \frac{1}{2} m \{ \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle \} + N \frac{1}{2} \{ I_1 \langle \omega_1^2 \rangle + I_2 \langle \omega_2^2 \rangle + I_3 \langle \omega_3^2 \rangle \}$$

Donc

$$U = N \langle E_c \rangle = \frac{6}{2} N k_B T = 3 N k_B T$$

La capacité calorifique à volume constant.

$$\boxed{C_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V = 3 N k_B}$$

Pour une mole de particules  $N = \mathcal{N}_{\text{Avogadro}}$  la capacité calorifique molaire  $\boxed{C_V = 3R}$

7. Pour un gaz parfait dont chaque molécule possède  $\eta$  degrés de liberté et dont l'énergie cinétique de ces molécules s'écrit sous forme quadratique.

$$U = \frac{\eta}{2} n \cdot R \cdot T \quad ; \quad \boxed{C_V = \frac{\eta}{2} R} \quad \text{et} \quad C_p = C_V + R = \frac{\eta + 2}{2} R$$