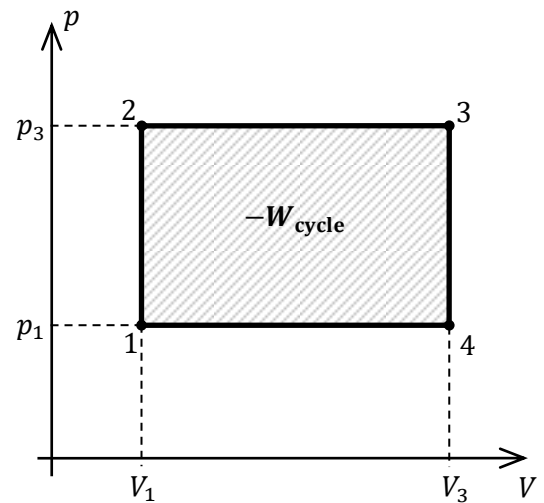


**CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE**

MODULE : PHYSIQUE STATISTIQUE.

**EXERCICE 01: (08 points)**

1. Un gaz réel peut être considéré comme un gaz parfait dans la mesure où nous pouvons **négliger les interactions entre les particules** qui le composent. Ce cas de figure peut être réalisé quand les particules sont – en moyenne – éloignées les unes des autres. C'est le cas de gaz ayant une **faible pression** (gaz dilués).
2. Diagramme de Clapeyron.
3. Echange de chaleur et travail durant les parties du cycle

Gaz parfait diatomique :  $C_V = 5R/2$  ;  $C_p = C_V + R = 7R/2$ Transformation 1  $\rightarrow$  2 : Chauffage isochore.

$$\delta W = 0 \quad \text{et} \quad \delta Q = n \cdot C_V \cdot dT \quad \Rightarrow \quad W_1^2 = 0 \quad \text{et} \quad Q_1^2 = \frac{5}{2} nR \cdot (T_2 - T_1)$$

Comme

$$p_1 V_1 = nR \cdot T_1 \quad \text{et} \quad p_2 V_2 = p_3 V_1 = nR \cdot T_2 \quad ; \quad (p_2 = p_3 \quad \text{et} \quad V_2 = V_1)$$

Donc

$$\boxed{Q_1^2 = \frac{5}{2} V_1 \cdot (p_3 - p_1)} \quad \text{et} \quad \boxed{W_1^2 = 0}$$

Transformation 2  $\rightarrow$  3 : Chauffage isobare.

$$dU = n \cdot C_V \cdot dT \quad , \quad \delta Q = n \cdot C_p \cdot dT \quad \Rightarrow \quad \delta W = dU - \delta Q = -nR \cdot dT$$

Donc

$$Q_2^3 = \frac{7}{2} nR \cdot (T_3 - T_2) \quad \text{et} \quad W_2^3 = -nR \cdot (T_3 - T_2)$$

Comme

$$p_2 V_2 = p_3 V_1 = nR \cdot T_2 \quad \text{et} \quad p_3 V_3 = nR \cdot T_3 \quad ; \quad (p_2 = p_3 \quad \text{et} \quad V_2 = V_1)$$

Donc

$$\boxed{Q_2^3 = \frac{7}{2} p_3 \cdot (V_3 - V_1)} \quad \text{et} \quad \boxed{W_2^3 = -p_3 \cdot (V_3 - V_1)}$$

Transformation 3  $\rightarrow$  4 : Refroidissement isochore.

$$\delta W = 0 \quad \text{et} \quad \delta Q = n \cdot C_V \cdot dT \quad \Rightarrow \quad W_3^4 = 0 \quad \text{et} \quad Q_3^4 = \frac{5}{2} nR \cdot (T_4 - T_3)$$

Comme

$$p_3 V_3 = nR \cdot T_3 \quad \text{et} \quad p_4 V_4 = p_1 V_3 = nR \cdot T_4 \quad ; \quad (p_4 = p_1 \quad \text{et} \quad V_4 = V_3)$$

Donc

$$\boxed{Q_3^4 = \frac{5}{2} V_3 \cdot (p_1 - p_3)} \quad \text{et} \quad \boxed{W_3^4 = 0}$$

Transformation 4 → 1 : Refroidissement isobare.

$$dU = n \cdot C_V \cdot dT \quad , \quad \delta Q = n \cdot C_p \cdot dT \quad \Rightarrow \quad \delta W = dU - \delta Q = -nR \cdot dT$$

Donc

$$Q_4^1 = \frac{7}{2} nR \cdot (T_1 - T_4) \quad \text{et} \quad W_4^1 = -nR \cdot (T_1 - T_4)$$

Comme

$$p_1 V_1 = nR \cdot T_1 \quad \text{et} \quad p_4 V_4 = p_1 V_3 = nR \cdot T_4 \quad ; \quad (p_4 = p_1 \quad \text{et} \quad V_4 = V_3)$$

Donc

$$\boxed{Q_4^1 = \frac{7}{2} p_1 \cdot (V_1 - V_3)} \quad \text{et} \quad \boxed{W_4^1 = -p_1 \cdot (V_1 - V_3)}$$

**Et pour un cycle complet**

$$Q_{\text{cycle}} = Q_1^2 + Q_2^3 + Q_3^4 + Q_4^1 = \frac{5}{2} V_1 \cdot (p_3 - p_1) + \frac{7}{2} p_3 \cdot (V_3 - V_1) + \frac{5}{2} V_3 \cdot (p_1 - p_3) + \frac{7}{2} p_1 \cdot (V_1 - V_3)$$

$$\boxed{Q_{\text{cycle}} = V_1 p_1 - V_1 p_3 + V_3 p_3 - V_3 p_1 = (V_1 - V_3)(p_1 - p_3)}$$

Et

$$W_{\text{cycle}} = W_1^2 + W_2^3 + W_3^4 + W_4^1 = 0 - p_3 \cdot (V_3 - V_1) + 0 - p_1 \cdot (V_1 - V_3)$$

$$\boxed{W_{\text{cycle}} = (V_1 - V_3)(p_3 - p_1) = -Q_{\text{cycle}}}$$

**Tableau récapitulatif**

1 → 2	2 → 3	3 → 4	4 → 1	Cycle complet
Chauffage isochore	Chauffage isobare	Refroidissement isochore	Refroidissement isobare	
$Q_1^2 = \frac{5}{2} V_1 \cdot (p_3 - p_1)$	$Q_2^3 = \frac{7}{2} p_3 \cdot (V_3 - V_1)$	$Q_3^4 = \frac{5}{2} V_3 \cdot (p_1 - p_3)$	$Q_4^1 = \frac{7}{2} p_1 \cdot (V_1 - V_3)$	$Q_{\text{cycle}} = (V_1 - V_3)(p_1 - p_3)$
$W_1^2 = 0$	$W_2^3 = -p_3 \cdot (V_3 - V_1)$	$W_3^4 = 0$	$W_4^1 = -p_1 \cdot (V_1 - V_3)$	$W_{\text{cycle}} = (V_1 - V_3)(p_3 - p_1)$

#### 4. A partir du diagramme de Clapeyron

L'aire à l'intérieur du cycle de transformations est égale au travail du cycle multiplié par (-1)

Comme le cycle est représenté par un rectangle, sa surface est égale la longueur multipliée par la largeur et :

$$W_{\text{cycle}} = -(V_3 - V_1)(p_3 - p_1) \quad \text{et} \quad Q_{\text{cycle}} = -W_{\text{cycle}} = (V_3 - V_1)(p_3 - p_1)$$

#### 5. Nature du cycle : Comme $V_3 > V_1$ et $p_3 > p_1$ donc $W_{\text{cycle}} < 0$ et $Q_{\text{cycle}} > 0$

C'est un cycle moteur (le gaz reçoit de la chaleur et il donne du travail).

**6. Variation d'entropie du gaz parfait (transformation réversible).**

Transformation 1 → 2 : Chauffage isochore.

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \delta Q = nC_V \frac{dT}{T} \Rightarrow \Delta S_{1 \rightarrow 2} = \frac{5}{2} nR \cdot \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right)$$

Comme

$$p_1 V_1 = nR \cdot T_1 \quad \text{et} \quad p_2 V_2 = p_3 V_1 = nR \cdot T_2 \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_3}{p_1} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta S_{1 \rightarrow 2} = \frac{5}{2} nR \cdot \ln \left( \frac{p_3}{p_1} \right)}$$

Transformation 2 → 3 : Chauffage isobare.

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = n \cdot C_p \frac{dT}{T} \Rightarrow \Delta S_{2 \rightarrow 3} = \frac{7}{2} nR \cdot \ln \left( \frac{T_3}{T_2} \right)$$

Comme

$$p_2 V_2 = p_3 V_1 = nR \cdot T_2 \quad \text{et} \quad p_3 V_3 = nR \cdot T_3 \Rightarrow \frac{T_3}{T_2} = \frac{V_3}{V_1} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta S_{2 \rightarrow 3} = \frac{7}{2} nR \cdot \ln \left( \frac{V_3}{V_1} \right)}$$

Transformation 3 → 4 : Refroidissement isochore.

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \delta Q = nC_V \frac{dT}{T} \Rightarrow \Delta S_{3 \rightarrow 4} = \frac{5}{2} nR \cdot \ln \left( \frac{T_4}{T_3} \right)$$

Comme

$$p_3 V_3 = nR \cdot T_3 \quad \text{et} \quad p_4 V_4 = p_1 V_3 = nR \cdot T_4 \Rightarrow \frac{T_4}{T_3} = \frac{p_1}{p_3} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta S_{3 \rightarrow 4} = \frac{5}{2} nR \cdot \ln \left( \frac{p_1}{p_3} \right)}$$

Transformation 4 → 1 : Refroidissement isobare.

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = n \cdot C_p \frac{dT}{T} \Rightarrow \Delta S_{4 \rightarrow 1} = \frac{7}{2} nR \cdot \ln \left( \frac{T_1}{T_4} \right)$$

Comme

$$p_1 V_1 = nR \cdot T_1 \quad \text{et} \quad p_4 V_4 = p_1 V_3 = nR \cdot T_4 \Rightarrow \frac{T_1}{T_4} = \frac{V_1}{V_3} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta S_{4 \rightarrow 1} = \frac{7}{2} nR \cdot \ln \left( \frac{V_1}{V_3} \right)}$$

**Et pour le cycle complet**

$$\Delta S_{\text{cycle}} = \Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} + \Delta S_{3 \rightarrow 4} + \Delta S_{4 \rightarrow 1}$$

Donc

$$\Delta S_{\text{cycle}} = \frac{5}{2} nR \cdot \ln \left( \frac{p_3}{p_1} \right) + \frac{7}{2} nR \cdot \ln \left( \frac{V_3}{V_1} \right) + \frac{5}{2} nR \cdot \ln \left( \frac{p_1}{p_3} \right) + \frac{7}{2} nR \cdot \ln \left( \frac{V_1}{V_3} \right)$$

Et

$$\boxed{\Delta S_{\text{cycle}} = 0}$$

**EXERCICE 02 : (06 points)**

1. D'après la figure ci-contre les particules ayant une vitesse  $\vec{v}$  qui arrivent à la surface  $s$  du trou durant un intervalle de temps  $dt$ , sont contenues dans le prisme cylindrique de base  $s$  et de hauteur  $v \cdot dt \cdot \cos \alpha$ , avec  $\alpha$  est l'angle entre  $\vec{s}$  et  $\vec{v}$ . D'où les molécules incidentes sont contenues dans un volume

$$d\tau = v \cdot dt \cdot \cos \alpha \cdot s$$

Comme

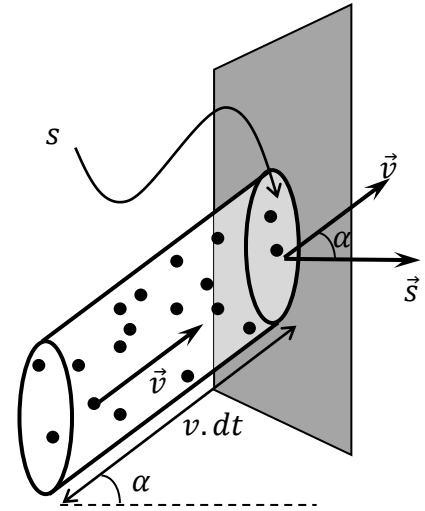
$$v \cdot \cos \alpha = \vec{v} \cdot \vec{e}_x = v_x$$

Alors

$$d\tau = v_x \cdot dt \cdot s$$

Le nombre de molécules contenues dans ce volume est obtenu en multipliant la densité volumique, considérée uniforme, par le volume

$$dN = \frac{N}{V} dt \cdot f(\vec{v}) \cdot dv_x dv_y dv_z = \frac{N}{V} v_x \cdot dt \cdot s \cdot f(\vec{v}) \cdot dv_x dv_y dv_z$$



La proportion de molécules ayant une vitesse  $\vec{v}$  est donnée par le facteur de Maxwell–Boltzmann

$$f(\vec{v}) = \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m}{2 \cdot k_B T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}$$

Pour obtenir le nombre de molécules du gaz qui traversent la surface  $s$  quelque soit leur vitesse (à condition que  $v_x > 0$ ) on intègre sur toutes les vitesses en respectant la condition précédente. Il vient que :

$$dN_s = \iiint \frac{N}{V} v_x \cdot dt \cdot s \cdot \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m}{2 \cdot k_B T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z$$

Et

$$dN_s = \frac{N}{V} dt \cdot s \left\{ \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x \cdot \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m}{2 \cdot k_B T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z \right\}$$

Comme

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x \cdot \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m}{2 \cdot k_B T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z = \int_0^{+\infty} v_x \cdot \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \cdot e^{-\frac{m}{2 \cdot k_B T} (v_x^2)} dv_x$$

Et

$$\int_0^{+\infty} v_x \cdot \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \cdot e^{-\frac{m}{2 \cdot k_B T} (v_x^2)} dv_x = \left( \frac{m}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \left[ -\frac{k_B T}{m} e^{-\frac{m}{2 \cdot k_B T} (v_x^2)} \right]_0^{+\infty} = \left( \frac{k_B T}{2\pi \cdot m} \right)^{1/2}$$

Alors :

$$dN_s = \frac{N}{V} dt \cdot s \left( \frac{k_B T}{2\pi \cdot m} \right)^{1/2}$$

Volume du cylindre :  $V = \pi R^2 H = \pi D^2 H / 4$

Surface du cylindre :  $S = 2\pi R H = \pi D H$

Surface de condensation :  $s = 0,1\% \cdot S = \pi D H \times 10^{-3}$

$$dN_s = N \frac{4 \times 10^{-3}}{D} \left( \frac{k_B T}{2\pi \cdot m} \right)^{1/2} dt$$

2. La variation du nombre de particules dans l'enceinte :

$$dN = -dN_s = -\frac{N}{V} dt \cdot s \left( \frac{k_B T}{2\pi \cdot m} \right)^{1/2} = -N \frac{1}{\tau} dt$$

Avec

$$\tau = \frac{V}{s} \left( \frac{2\pi \cdot m}{k_B T} \right)^{1/2} = \frac{D}{4 \times 10^{-3}} \left( \frac{2\pi \cdot m}{k_B T} \right)^{1/2}$$

Donc

$$\frac{dN}{N} = -\frac{1}{\tau} dt$$

En intégrant

$$\ln(N) = -\frac{t}{\tau} + C^{te} \Rightarrow \boxed{N(t) = N(0) \cdot \exp(-t/\tau)}$$

$N(0)$  est le nombre de particule initial dans l'enceinte ( $t = 0$ ).

3. Dans le cas d'un gaz parfait.

$$pV = n \cdot R \cdot T \quad \text{ou} \quad pV = N \cdot k_B \cdot T$$

Comme  $V$  et  $T$  sont constant

$$p(t) = \frac{k_B \cdot T}{V} N(t) = \frac{k_B \cdot T}{V} N_0 \cdot \exp(-\lambda \cdot t)$$

Ou

$$\boxed{p(t) = p(0) \cdot \exp(-t/\tau) = \frac{k_B \cdot T}{V} N(0) \cdot \exp(-t/\tau)}$$

$p(0)$  est la pression initiale dans l'enceinte ( $t = 0$ ).

La pression dans l'enceinte est diminuée d'un facteur 3.

$$\frac{p(t)}{p(0)} = \frac{1}{3} = \exp(-\Delta t/\tau)$$

D'où

$$\boxed{\Delta t = \ln 3 \times \tau = \frac{\ln 3}{4 \times 10^{-3}} D \left( \frac{2\pi \cdot m}{k_B T} \right)^{1/2}}$$

4. Application numérique :

$$\boxed{\tau = 0,1664 \text{ secondes}} \quad ; \quad \boxed{\Delta t = 0,1828 \text{ secondes}}$$

**EXERCICE 03 : (06 points)**ENSEMBLE MICROCANONIQUE

1. Energie de l'ensemble des défauts. Nous avons  $n$  défauts d'énergie  $\epsilon_1$ , et  $N - n$  défauts d'énergie  $\epsilon_0$ . Donc :

$$E = n.(\epsilon_1) + (N - n).(\epsilon_0) \quad \Rightarrow \quad E = n.(\epsilon_1 - \epsilon_0) + N.\epsilon_0 \quad \text{ou} \quad \boxed{E = n.\epsilon + N.\epsilon_0}$$

2.  $\Omega(n)$  est le nombre de configurations correspondant à  $n$  défauts dans l'état  $\epsilon_1$ . Donc nous devons choisir  $n$  défauts parmi  $N$  et les placer dans l'état  $\epsilon_1$ , l'ordre étant indifférent.

$$\boxed{\Omega(n) = C_N^n = \frac{N!}{n! \times (N - n)!}}$$

3. Entropie microcanonique  $S(n)$  du système

$$S(n) = k_B \cdot \ln(\Omega(n))$$

En utilisant l'approximation de Stirling.

$$S(n) = k_B \cdot [N \cdot \ln(N) - n \cdot \ln(n) - (N - n) \cdot \ln((N - n))]$$

Ce qui nous donne

$$\boxed{S(n) = k_B \left( N \cdot \ln\left(\frac{N}{N - n}\right) - n \cdot \ln\left(\frac{n}{N - n}\right) \right)}$$

Température

$$\frac{1}{T} = \left. \frac{\partial S}{\partial E} \right|_{V,N} = \left. \frac{\partial S}{\partial n} \right|_{V,N} \frac{\partial n}{\partial E} \Big|_{V,N} = \frac{1}{\epsilon} \left. \frac{\partial S}{\partial n} \right|_{V,N}$$

En dérivant

$$\boxed{\frac{1}{T} = -\frac{k_B}{\epsilon} \ln\left(\frac{n}{N - n}\right)}$$

4. En inversant

$$\exp\left(-\frac{\epsilon}{k_B T}\right) = \frac{n}{N - n}$$

D'où

$$\left(1 + \exp\left(-\frac{\epsilon}{k_B T}\right)\right)n = N \cdot \exp\left(-\frac{\epsilon}{k_B T}\right)$$

Donc

$$\boxed{n(T) = N \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\epsilon}{k_B T}\right)}}$$

Et

$$\boxed{E = \frac{N\epsilon}{1 + \exp\left(\frac{\epsilon}{k_B T}\right)} + N.\epsilon_0}$$

5. Discussion

$$T \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \exp\left(\frac{\epsilon}{k_B T}\right) \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad n(0) \approx 0$$

$$T \rightarrow +\infty \quad \Rightarrow \quad \exp\left(\frac{\epsilon}{k_B T}\right) \approx 1 + \frac{\epsilon}{k_B T} \quad \text{et} \quad n(\infty) \approx \frac{N}{2}$$

## 6. Capacité calorifique

$$C_V = \left. \frac{\partial E}{\partial T} \right|_V = -N\epsilon \frac{-\frac{\epsilon}{k_B T^2} \cdot \exp\left(\frac{\epsilon}{k_B T}\right)}{\left(1 + \exp\left(\frac{\epsilon}{k_B T}\right)\right)^2}$$

Ou

$$C_V = \left. \frac{\partial E}{\partial T} \right|_V = N\epsilon \frac{\frac{\epsilon}{k_B T^2}}{\left(\exp\left(-\frac{\epsilon}{2k_B T}\right) + \exp\left(\frac{\epsilon}{2k_B T}\right)\right)^2}$$

Donc

$$C_V = Nk_B \left(\frac{\epsilon}{2k_B T}\right)^2 \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\epsilon}{2k_B T}\right)}$$