FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

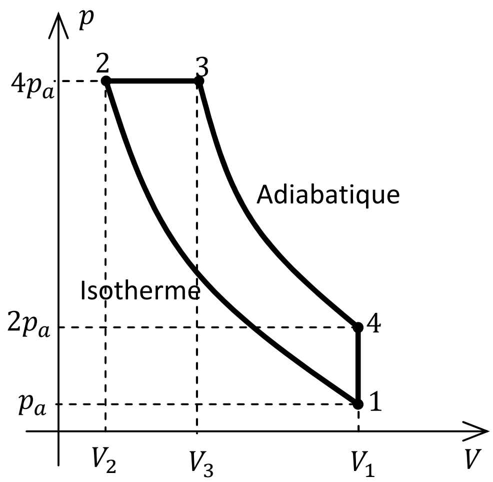
MODULE : PHYSIQUE STATISTIQUE.

EXERCICE 01: (10 points)

1. **Contraintes**

Compression isotherme $\Rightarrow$ Cylindre dans un thermostat avec un bon contact thermique.
Chauffage isobare $\Rightarrow$ Cylindre fermé par un piston pouvant glisser librement.
Détente adiabatique $\Rightarrow$ Enceinte avec des parois calorifugées.
Refroidissement à volume constant $\Rightarrow$ Enceinte avec des parois rigides.

2. **Diagramme de Clapeyron.**



3. **Pour un gaz parfait monoatomique,** et pour une transformation adiabatique

$$pV^\gamma = \text{constante} \quad \text{et} \quad pV = nR.T$$

Avec

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{5}{3} \qquad \text{avec} \qquad C_V = \frac{3}{2}R \quad \text{et} \quad C_p = \frac{5}{2}R$$

A l'état (1) et pour une mole $(n = 1)$.

$$p_1 = p_a \quad ; \quad T_1 = T_a \quad ; \quad p_1V_1 = nR.T_1 \quad \Rightarrow \quad V_1 = V_a = R\frac{T_a}{p_a}$$

A l'état (2) et pour une mole $(n = 1)$.

$$p_2 = 4p_a \quad ; \quad T_2 = T_a \quad ; \quad p_2V_2 = nR.T_2 \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{1}{4}V_a = \frac{1}{4}R\frac{T_a}{p_a}$$

A l'état (4) et pour une mole $(n = 1)$.

$$p_4 = 2p_a \quad ; \quad V_4 = V_1 = V_a \quad ; \quad p_4V_4 = nR.T_4 \quad \Rightarrow \quad T_4 = 2T_a$$

A l'état (3) et pour une mole $(n = 1)$.

$$p_3 = p_2 = 4p_a \quad \text{et} \quad p_3V_3^\gamma = p_4V_4^\gamma \quad \Rightarrow \quad V_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/\gamma} V_a = 2^{-3/5}.R\frac{T_a}{p_a}$$

$$p_3V_3 = nR.T_3 \quad \Rightarrow \quad T_3 = 4.2^{-3/5}.T_a = 2^{7/5}.T_a$$

D'où le tableau

Etat (1)	Etat (2)	Etat (3)	Etat (4)
$p_1 = p_a$	$p_2 = 4p_a$	$p_3 = 4p_a$	$p_4 = 2p_a$
$T_1 = T_a$	$T_2 = T_a$	$T_3 = 2^{7/5}.T_a$	$T_4 = 2T_a$
$V_1 = R\,T_a/p_a$	$V_2 = 0{,}25.R\,T_a/p_a$	$V_3 = 2^{-3/5}.R\,T_a/p_a$	$V_4 = R\,T_a/p_a$

Echanges de chaleur et travaux durant les parties du cycle

Transformation	ΔU	Q	W
$1 \to 2$	0	$-\ln(4).RT_a$	$\ln(4).RT_a$
$2 \to 3$	$nC_V\Delta T = \frac{3}{2}(2^{7/5}-1).RT_a$	$nC_p\Delta T = \frac{5}{2}(2^{7/5}-1).RT_a$	$-nR\Delta T = -(2^{7/5}-1).RT_a$
$3 \to 4$	$nC_V\Delta T = 3(1-2^{2/5}).RT_a$	0	$nC_V\Delta T = 3(1-2^{2/5}).RT_a$
$4 \to 1$	$nC_V\Delta T = -(3/2).RT_a$	$nC_V\Delta T = -(3/2).RT_a$	0
Cycle	0	$(5.2^{2/5}-4-\ln(4)).RT_a$	$(4-5.2^{2/5}+\ln(4)).RT_a$

Pour la transformation isotherme $(1 \to 2)$:

$$W_1^2 = \int \delta W = -\int_1^2 p.dV = -nRT\int_1^2 \frac{1}{V}.dV = -nRT_1.\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Donc

$$W_1^2 = -RT_a.\ln(1/4) = RT_a.\ln(4) = -Q_1^2$$

4. Rendement moteur.

Chaleur fournie : $Q_2^3 > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho = \left|\frac{W_{\text{cycle}}}{Q_2^3}\right| = \frac{5.2^{2/5}-4-\ln(4)}{5.2^{2/5}-2{,}5} = 29{,}5593\ \%}$

5. Variation d'entropie.

Transformation	$1 \to 2$	$2 \to 3$	$3 \to 4$	$4 \to 1$
$dS = \delta Q/T$	$dS = nR.dV/V$	$dS = nC_p.dT/T$	0	$dS = nC_V.dT/T$
ΔS	$R.\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -\ln 4.R$	$C_p.\ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) = \frac{7}{2}\ln 2.R$	0	$C_V.\ln\left(\frac{T_1}{T_4}\right) = -\frac{3}{2}\ln 2.R$

Et pour le cycle complet

$$\boxed{\Delta S_{\text{cycle}} = \Delta S_{1\to2} + \Delta S_{2\to3} + \Delta S_{3\to4} + \Delta S_{4\to1} = 0}$$

L'entropie S est une variable d'état, donc sa variation totale sur un cycle complet est nulle.

6. Application Numérique. $p_a = 1\ atm = 101325\ Pascal$; $T_a = 298\ K$; $R = 8{,}31\ J.K^{-1}mol^{-1}$

$p_1 = 1\ atm$	$p_2 = 4\ atm$	$p_3 = 4\ atm$	$p_4 = 2\ atm$
$T_1 = 298\ K$	$T_2 = 298\ K$	$T_3 = 786{,}426\ K$	$T_4 = 596\ K$
$V_1 = 24{,}5186\ l$	$V_2 = 6{,}1296\ l$	$V_3 = 16{,}1762\ l$	$V_4 = 24{,}5186\ l$

Transformation	ΔU	Q	W	ΔS
$1 \to 2$	0	$-3{,}4329\ kJ$	$+3{,}4329\ kJ$	$-11{,}5201\ JK^{-1}$
$2 \to 3$	$+6{,}0882\ kJ$	$+10{,}1470\ kJ$	$-4{,}0588\ kJ$	$+20{,}1601\ JK^{-1}$
$3 \to 4$	$-2{,}3736\ kJ$	0	$-2{,}3736\ kJ$	0
$4 \to 1$	$-3{,}7145\ kJ$	$-3{,}7145\ kJ$	0	$-8{,}6400\ JK^{-1}$
Cycle	0	$+2{,}9995\ kJ$	$-2{,}9995\ kJ$	0

EXERCICE 02 : (10 points)

$$\epsilon_{m_J} = m_J . g\mu_B B \qquad \text{avec} \qquad m_J = -J, -J+1, \dots, J-1, J$$

1. Calcul de la fonction de partition canonique z pour un seul atome.

$$\boxed{z = \sum_{m_J=-J}^{+J} e^{-\beta.\epsilon_{m_J}}}$$

En remplaçant :

$$z = \sum_{m_J=-J}^{+J} e^{-m_J.\beta g\mu_B B} = \sum_{m_J=-J}^{+J} \left(e^{-\beta g\mu_B B}\right)^{m_J}$$

En utilisant

$$\sum_{m_J=-J}^{+J} a^{m_J} = \frac{a^{\left(J+\frac{1}{2}\right)} - a^{-\left(J+\frac{1}{2}\right)}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}}$$

Nous avons

$$z = \frac{e^{-\left(J+\frac{1}{2}\right)\beta g\mu_B B} - e^{+\left(J+\frac{1}{2}\right)\beta g\mu_B B}}{e^{-\frac{1}{2}\beta g\mu_B B} - e^{+\frac{1}{2}\beta g\mu_B B}}$$

D'où

$$\boxed{z = \frac{\sinh\left((J+1/2)\beta g\mu_B B\right)}{\sinh\left((1/2)\beta g\mu_B B\right)}}$$

Fonction de partition canonique Z correspondant à N particules identiques et *discernables*.

$$\boxed{Z = z^N = \left(\frac{\sinh\left((J+1/2)\beta g\mu_B B\right)}{\sinh\left((1/2)\beta g\mu_B B\right)}\right)^N}$$

2. Energie interne du système U.

$$\boxed{U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -N\frac{\partial \ln z}{\partial \beta}}$$

Donc

$$U = -N\left\{\frac{\partial \ln \sinh\left((J+1/2)\beta g\mu_B B\right)}{\partial \beta} - \frac{\partial \ln \sinh\left((1/2)\beta g\mu_B B\right)}{\partial \beta}\right\}$$

$$U = -N\left\{\left(J+\frac{1}{2}\right) g\mu_B B\frac{\cosh\left((J+1/2)\beta g\mu_B B\right)}{\sinh\left((J+1/2)\beta g\mu_B B\right)} - \frac{1}{2} g\mu_B B\frac{\cosh\left((1/2)\beta g\mu_B B\right)}{\sinh\left((1/2)\beta g\mu_B B\right)}\right\}$$

Et

$$\boxed{U = -Ng\mu_B B\left\{\left(J+\frac{1}{2}\right)\text{cotanh}\left(\left(J+\frac{1}{2}\right)\beta g\mu_B B\right) - \frac{1}{2}\text{cotanh}\left(\frac{1}{2}\beta g\mu_B B\right)\right\}}$$

3. Capacité calorifique à volume constant.

$$C_V = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_V = \left.\frac{\partial U}{\partial \beta}\right|_V \frac{\partial \beta}{\partial T} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{C_V = -\frac{1}{k_B T^2}\left.\frac{\partial U}{\partial \beta}\right|_V = -k_B\beta^2\left(\left.\frac{\partial U}{\partial \beta}\right|_V\right)}$$

On utilise

$$\frac{d\,\text{cotanh}(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}\right) = \frac{\sinh^2(x) - \cosh^2(x)}{\sinh^2(x)} = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$$

D'où

$$\boxed{C_V = -k_B\beta^2\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}\bigg|_V\right) = Nk_B\left\{\frac{1}{4}\frac{(\beta g\mu_B B)^2}{\sinh^2(1/2\,\beta g\mu_B B)} - \left(J+\frac{1}{2}\right)^2\frac{(\beta g\mu_B B)^2}{\sinh^2\big((J+1/2)\beta g\mu_B B\big)}\right\}}$$

4. Energie libre F .

$$\boxed{F = -k_B T.\ln Z = -Nk_B T.\ln z}$$

Donc

$$\boxed{F = -Nk_B T.\left\{\ln\left(\sinh\left(\left(J+\frac{1}{2}\right)\beta g\mu_B B\right)\right) - \ln\left(\sinh\left(\frac{1}{2}\beta g\mu_B B\right)\right)\right\}}$$

5. Entropie.

$$S = \frac{U-F}{T}$$

$$\boxed{S = Nk_B\left\{\left(J+\frac{1}{2}\right)\beta g\mu_B B.\,\mathrm{cotanh}\left(\left(J+\frac{1}{2}\right)\beta g\mu_B B\right) - \frac{1}{2}\beta g\mu_B B.\,\mathrm{cotanh}\left(\frac{1}{2}\beta g\mu_B B\right) - \ln\left(\frac{\sinh\big((J+1/2)\beta g\mu_B B\big)}{\sinh\big((1/2)\beta g\mu_B B\big)}\right)\right\}}$$

6. Probabilités canoniques.

$$P(m_J) = \frac{1}{z}e^{-\beta\epsilon_{m_J}}$$

D'où

$$\boxed{P(m_J) = \frac{\sinh\big((1/2)\beta g\mu_B B\big)}{\sinh\big((J+1/2)\beta g\mu_B B\big)}e^{-m_J.\beta g\mu_B B}}$$

7. Moment moyen par atome $\overline{\mu}$ dans la direction du champ.

$$\overline{\mu} = \sum_{m_J=-J}^{+J}\mu_{m_J}.P(m_J)$$

$$\overline{\mu} = \sum_{m_J=-J}^{+J} -m_J.g\mu_B.P(m_J) = -\frac{\overline{E}}{NB} = -\frac{U}{NB}$$

Donc

$$\boxed{\overline{\mu} = g\mu_B\left\{\left(J+\frac{1}{2}\right)\mathrm{cotanh}\left(\left(J+\frac{1}{2}\right)\beta g\mu_B B\right) - \frac{1}{2}\mathrm{cotanh}\left(\frac{1}{2}\beta g\mu_B B\right)\right\}}$$

8. Cas limites.

Pour : $\beta g\mu_B B \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{g\mu_B B}{k_B T} \ll 1$ et $T \gg \theta_J$ avec $\boxed{\theta_J = \frac{g\mu_B B}{k_B}}$

$$\boxed{U \approx -\frac{1}{3}J(J+1).Nk_B T.\left(\frac{g\mu_B B}{k_B T}\right)^2} \quad \text{et} \quad \boxed{C_V \approx 0}$$

Pour : $\beta g\mu_B B \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{g\mu_B B}{k_B T} \gg 1$ et $T \ll \theta_J$ avec $\boxed{\theta_J = \frac{g\mu_B B}{k_B}}$

$$\boxed{U \approx -Ng\mu_B B.J} \quad \text{et} \quad \boxed{C_V \approx Nk_B(\beta g\mu_B B)^2 e^{-\beta g\mu_B B}\left\{1-(2J+1)^2e^{-(2J+1)}\right\}}$$