FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : PHYSIQUE STATISTIQUE.

EXERCICE 01: (10 points)

1. **Contraintes**

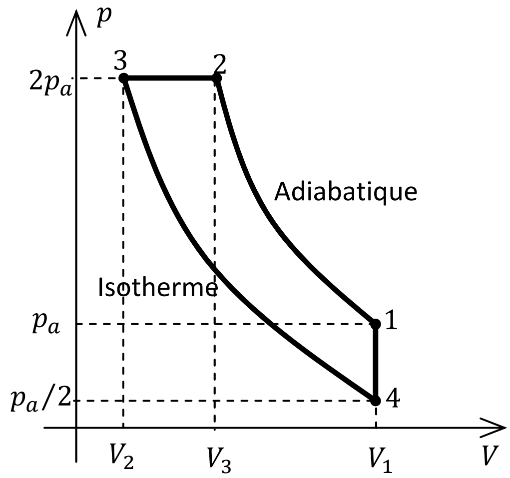
Compression adiabatique :
Enceinte avec des parois calorifugées.

Refroidissement à pression constante :
Cylindre fermé par un piston pouvant glisser librement.

Détente isotherme :
Cylindre dans un thermostat avec un bon contact thermique.

Chauffage isochore :
Enceinte avec des parois rigides.

2. **Diagramme de Clapeyron.** (Figure ci-contre).



3. **Pour un gaz parfait monoatomique,** et pour une transformation adiabatique

$$pV^{\gamma} = \text{constante} \quad \text{et} \quad pV = nR.T$$

Avec

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{5}{3} \qquad \text{avec} \qquad C_V = \frac{3}{2}R \quad \text{et} \quad C_p = \frac{5}{2}R$$

A l'état (1) et pour une mole $(n = 1)$.

$$p_1 = p_a \quad ; \quad T_1 = T_a \quad ; \quad p_1V_1 = nR.T_1 \quad \Rightarrow \quad V_1 = V_a = R\frac{T_a}{p_a}$$

A l'état (2) et pour une mole $(n = 1)$.

$$p_2 = 2p_a \quad \text{et} \quad p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma} \quad \Rightarrow \quad V_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/\gamma} V_a = 2^{-3/5}.R\frac{T_a}{p_a}$$

$$p_2V_2 = nR.T_2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 2.2^{-3/5}.T_a = 2^{2/5}.T_a$$

A l'état (4) et pour une mole $(n = 1)$.

$$p_4 = \frac{1}{2}p_a \quad ; \quad V_4 = V_1 = V_a \quad ; \quad p_4V_4 = nR.T_4 \quad \Rightarrow \quad T_4 = \frac{1}{2}T_a$$

A l'état (3) et pour une mole $(n = 1)$.

$$p_3 = p_2 = 2p_a \quad \text{et} \quad T_3 = T_4 = \frac{1}{2}T_a \quad ; \quad p_3V_3 = nR.T_3 \quad \Rightarrow \quad V_3 = \frac{1}{4}V_a$$

D'où le tableau

Etat (1)	Etat (2)	Etat (3)	Etat (4)
$p_1 = p_a$	$p_2 = 2p_a$	$p_3 = 2p_a$	$p_4 = p_a/2$
$T_1 = T_a$	$T_2 = 2^{2/5}.T_a$	$T_3 = T_a/2$	$T_4 = T_a/2$
$V_1 = R\,T_a/p_a$	$V_2 = 2^{-3/5}.R\,T_a/p_a$	$V_3 = 0{,}25.R\,T_a/p_a$	$V_4 = R\,T_a/p_a$

4. **Echanges de chaleur et travaux durant les parties du cycle**

Transformation	ΔU	Q	W
$1 \to 2$	$nC_V\Delta T = \frac{3}{2}(2^{2/5}-1).RT_a$	0	$\frac{3}{2}(2^{2/5}-1).RT_a$
$2 \to 3$	$nC_V\Delta T = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-2^{2/5}\right).RT_a$	$nC_p\Delta T = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}-2^{2/5}\right).RT_a$	$-nR\Delta T = -\left(\frac{1}{2}-2^{2/5}\right).RT_a$
$3 \to 4$	0	$RT_a.\ln(2)$	$-RT_a.\ln(2)$
$4 \to 1$	$nC_V\Delta T = (3/4).RT_a$	$nC_V\Delta T = (3/4).RT_a$	0
Cycle	0	$(2-5.2^{-3/5}+\ln(2)).RT_a$	$(5.2^{-3/5}-2-\ln(2)).RT_a$

Pour la transformation isotherme $(3 \to 4)$:

$$W_3^4 = \int \delta W = -\int_3^4 p.dV = -\int_3^4 p.dV = -nRT\int_3^4 \frac{1}{V}.dV = -nRT_3.\ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right)$$

Donc

$$W_3^4 = -R\frac{T_a}{2}.\ln(4) = -RT_a.\ln(2) = -Q_3^4$$

5. **Nature de ce cycle :** $Q_{\text{cycle}} < 0$ et $W_{\text{cycle}} > 0$ $\Rightarrow$ Pompe à chaleur

6. **Variation d'entropie.**

Transformation	$1 \to 2$	$2 \to 3$	$3 \to 4$	$4 \to 1$
$dS = \delta Q/T$	0	$dS = nC_p.dT/T$	$dS = nR.dV/V$	$dS = nC_V.dT/T$
ΔS	0	$C_p.\ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) = -\frac{7}{2}\ln 2.R$	$R.\ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) = \ln 4.R$	$C_V.\ln\left(\frac{T_1}{T_4}\right) = \frac{3}{2}\ln 2.R$

Et pour le cycle complet

$$\boxed{\Delta S_{\text{cycle}} = \Delta S_{1\to2} + \Delta S_{2\to3} + \Delta S_{3\to4} + \Delta S_{4\to1} = 0}$$

L'entropie S est une variable d'état, donc sa variation totale sur un cycle complet est nulle.

7. **Application Numérique :** $T_a = 300\ K$; $R = 8{,}314\ J.K^{-1}mol^{-1}$

Transformation	ΔU	Q	W	ΔS
$1 \to 2$	$1{,}1953\ kJ$	0	$1{,}1953\ kJ$	0
$2 \to 3$	$-3{,}0660\ kJ$	$-5{,}1100\ kJ$	$2{,}0440\ kJ$	$-20{,}1698\ JK^{-1}$
$3 \to 4$	0	$1{,}7288\ kJ$	$-1{,}7288\ kJ$	$11{,}5256\ JK^{-1}$
$4 \to 1$	$1{,}8706\ kJ$	$1{,}8706\ kJ$	0	$8{,}6442\ JK^{-1}$
Cycle	0	$-1{,}5105\ kJ$	$+1{,}5105\ kJ$	0

EXERCICE 02 : (10 points)

$$\epsilon_p = \epsilon_0 + p.\epsilon \qquad \text{avec} \qquad p = 0, \dots, n$$

1. Calcul de la fonction de partition canonique z pour un seul atome.

$$\boxed{z = \sum_{p=0}^{n} e^{-\beta.(\epsilon_0 + p.\epsilon)}}$$

En remplaçant :

$$z = e^{-\beta\epsilon_0} \sum_{p=0}^{n} e^{-\beta p.\epsilon} = e^{-\beta\epsilon_0} \sum_{p=0}^{n} \left(e^{-\beta\epsilon}\right)^p$$

En utilisant

$$1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Nous avons

$$z = e^{-\beta\epsilon_0} \frac{1 - e^{-(n+1)\beta\epsilon}}{1 - e^{-\beta\epsilon}} = e^{-\beta\epsilon_0} \frac{e^{-(n+1)\beta\epsilon/2}}{e^{-\beta\epsilon/2}} \frac{\sinh\left((n+1)\,\beta\epsilon/2\right)}{\sinh(\beta\epsilon/2)}$$

D'où

$$\boxed{z = e^{-\beta(\epsilon_0 + n.\epsilon/2)} \frac{\sinh\left((n+1)\,\beta\epsilon/2\right)}{\sinh(\beta\epsilon/2)}}$$

Fonction de partition canonique Z correspondant à N particules identiques et *discernables*.

$$\boxed{Z = z^N = e^{-N\beta(\epsilon_0 + n.\epsilon/2)} \left(\frac{\sinh\left((n+1)\,\beta\epsilon/2\right)}{\sinh(\beta\epsilon/2)}\right)^N}$$

2. Energie interne du système U.

$$\boxed{U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -N \frac{\partial \ln z}{\partial \beta}}$$

Donc

$$U = -N \left\{ \frac{\partial\left(-\beta(\epsilon_0 + n.\epsilon/2)\right)}{\partial \beta} + \frac{\partial \ln\left(\sinh\left((n+1)\,\beta\epsilon/2\right)\right)}{\partial \beta} - \frac{\partial \ln\left(\sinh(\beta\epsilon/2)\right)}{\partial \beta} \right\}$$

$$U = N \left\{ \epsilon_0 + \frac{n\epsilon}{2} - \frac{(n+1)\epsilon}{2} \frac{\cosh\left((n+1)\,\beta\epsilon/2\right)}{\sinh\left((n+1)\,\beta\epsilon/2\right)} + \frac{\epsilon}{2} \frac{\cosh(\beta\epsilon/2)}{\sinh(\beta\epsilon/2)} \right\}$$

Et

$$\boxed{U = N \left\{ \epsilon_0 + \frac{n\epsilon}{2} - \frac{(n+1)\,\epsilon/2}{\tanh\left((n+1)\,\beta\epsilon/2\right)} + \frac{\epsilon/2}{\tanh(\beta\epsilon/2)} \right\}}$$

3. Capacité calorifique à volume constant.

$$C_V = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_V = \left.\frac{\partial U}{\partial \beta}\right|_V \frac{\partial \beta}{\partial T} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{C_V = -\frac{1}{k_B T^2} \left.\frac{\partial U}{\partial \beta}\right|_V = -k_B \beta^2 \left(\left.\frac{\partial U}{\partial \beta}\right|_V\right)}$$

On utilise

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\tanh(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}\right) = \frac{\sinh^2(x) - \cosh^2(x)}{\sinh^2(x)} = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$$

D'où

$$\boxed{C_V = -k_B \beta^2 \left(\left.\frac{\partial U}{\partial \beta}\right|_V\right) = N k_B \left\{ \frac{\left((n+1)\,\beta\epsilon/2\right)^2}{\sinh^2\left((n+1)\,\beta\epsilon/2\right)} - \frac{(\beta\epsilon/2)^2}{\sinh^2(\beta\epsilon/2)} \right\}}$$

4. Energie libre F.

$$\boxed{F = -k_B T.\ln Z = -Nk_B T.\ln z}$$

Donc

$$\boxed{F = N\left(\epsilon_0 + \frac{n.\epsilon}{2}\right) - Nk_B T.\left\{\ln\left(\sinh\left((n+1)\frac{\beta\epsilon}{2}\right)\right) - \ln\left(\sinh\left(\frac{\beta\epsilon}{2}\right)\right)\right\}}$$

5. Entropie.

$$S = \frac{U - F}{T}$$

$$\boxed{S = Nk_B\left\{-\frac{(n+1)\,\beta\epsilon/2}{\tanh\big((n+1)\,\beta\epsilon/2\big)} + \frac{\beta\epsilon/2}{\tanh(\beta\epsilon/2)} + \ln\left(\frac{\sinh\big((n+1)\,\beta\epsilon/2\big)}{\sinh(\beta\epsilon/2)}\right)\right\}}$$

6. Probabilités canoniques.

$$\mathrm{Proba}(p) = \frac{1}{z}e^{-\beta\epsilon_p}$$

D'où

$$\boxed{\mathrm{Proba}(p) = e^{-\beta((2p-n).\epsilon/2)}\frac{\sinh(\beta\epsilon/2)}{\sinh\big((n+1)\,\beta\epsilon/2\big)}}$$

7. Hautes et basses températures.

Pour : $\dfrac{\beta\epsilon}{2} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\epsilon}{2k_B T} \ll 1 \quad$ et $\quad T \gg \theta \quad$ avec $\quad \boxed{\theta = \dfrac{\epsilon}{2k_B}}$

$$U \approx N\left(\epsilon_0 + \frac{n\epsilon}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \boxed{C_V \approx 0}$$

Pour : $\dfrac{\beta\epsilon}{2} \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\epsilon}{2k_B T} \gg 1 \quad$ et $\quad T \ll \theta \quad$ avec $\quad \boxed{\theta = \dfrac{\epsilon}{2k_B}}$

$$U \approx N\epsilon_0 \qquad \text{et} \qquad \boxed{C_V \approx \frac{Nk_B}{16}(\beta\epsilon)^2 e^{-\beta\epsilon}\{(n+1)^2 e^{-n\beta\epsilon} - 1\}}$$

8. Limites températures :

$$T \longrightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad U = N\epsilon_0$$

Toutes les particules se trouvent dans leur état fondamental (système gelé).

$$T \longrightarrow +\infty \quad \Rightarrow \quad U = N\left(\epsilon_0 + \frac{n\epsilon}{2}\right)$$

Les particules sont équiprobablement réparties sur touts les états.

$$\mathrm{Proba}(p) = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \bar{\epsilon} = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n}\epsilon_0 + p.\epsilon = \frac{1}{n}\frac{\big(\epsilon_0 + (\epsilon_0 + n\epsilon)\big)\times n}{2} = \epsilon_0 + \frac{n\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad U = N\bar{\epsilon}$$