FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

MODULE : MÉCANIQUE ANALYTIQUE.
DURÉE : 01 Heure 30 Minutes.

EXERCICE 01 : (06 *points*)

Un cylindre plein de masse M et de rayon a roule sans glisser, uniquement sous l'effet de son poids, à l'intérieur d'une cavité cylindrique de rayon R (figure 01.). On néglige les frottements avec l'air.

1. Quelle est le nombre de degrés de liberté du cylindre.
2. Ecrire la condition de roulement sans glissement.
3. Ecrire le lagrangien du système.
4. A partir des équations d'Euler-Lagrange, déduire l'équation différentielle du mouvement.
5. Quelle est, dans ce cas, la période des petites oscillations libres du cylindre.
6. Ecrire le Hamiltonien du cylindre. Que représente le Hamiltonien dans ce cas ?

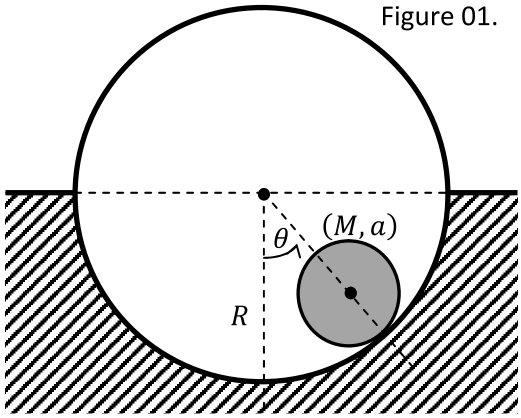

Figure 01.

EXERCICE 02 : (07 *points*)

Une bille de masse ponctuelle m soumise au champ gravitationnel terrestre, est astreinte à glisser sans frottement le long d'un cerceau vertical de masse négligeable et de rayon R. Le cerceau tourne autour de son axe vertical (OZ) avec une vitesse angulaire constante ω et la position angulaire de la bille sur le cerceau est notée θ comme le montre la figure 02.

1. Quel est le nombre de degrés de liberté du système ? Définir la (ou les) coordonnée(s) généralisée(s) du système.
2. Ecrire le Lagrangien du système.
3. Ecrire les équations de Lagrange et en déduire l'équation (ou les équations) du mouvement.
4. Discuter suivant les valeurs de ω les positions d'équilibres de la bille le long du cerceau $\left(\ddot{\theta}_{\text{équilibre}} = 0\right)$.
5. Retrouver l'équation (ou les équations) du mouvement en utilisant le formalisme de Hamilton.

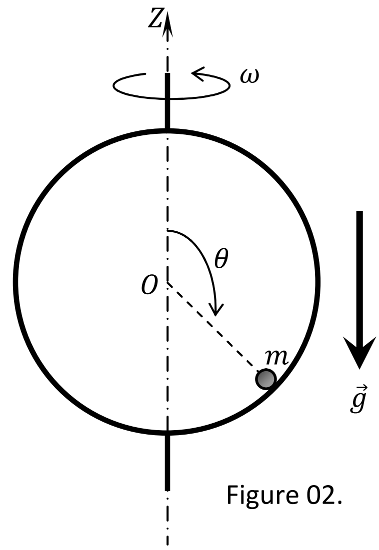

Figure 02.

EXERCICE 03 : (07 *points*)

1. Ecrire le lagrangien d'un oscillateur harmonique à une dimension (q) de masse m et de constante de raideur k (on notera $\omega^2 = k/m$).
2. Construire le Hamiltonien $\mathcal{H}(q, p)$ du système.
3. On considère la transformation suivante des anciennes variables (q, p) aux nouvelles variables (Q, P)

$$p = \sqrt{2m\omega.P}.\cos Q \quad \text{et} \quad q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}.\sin Q$$

   Cette transformation est-elle canonique ?
4. Calculer le nouveau Hamiltonien $H(Q, P)$.
5. Déterminer les équations de Hamilton pour les nouvelles variables et calculer $Q(t)$ et $P(t)$.
6. Trouver alors la solution du problème originel, $q(t)$ et $p(t)$.