

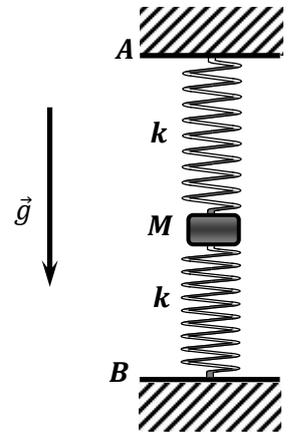
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

MODULE : MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

DURÉE : 01 Heure 30 Minutes.

EXERCICE 01 : (10 points)

Entre deux points A et B , sont tendus deux ressorts identiques, ayant chacun une longueur à vide l_0 , et une constante de raideur k . On place entre les deux ressorts un point matériel M de masse m astreint à se déplacer suivant l'axe vertical. Le système étant contenu dans le plan vertical, comme le montre la figure ci-contre, et la distance AB est notée $AB = l = \text{constante}$.



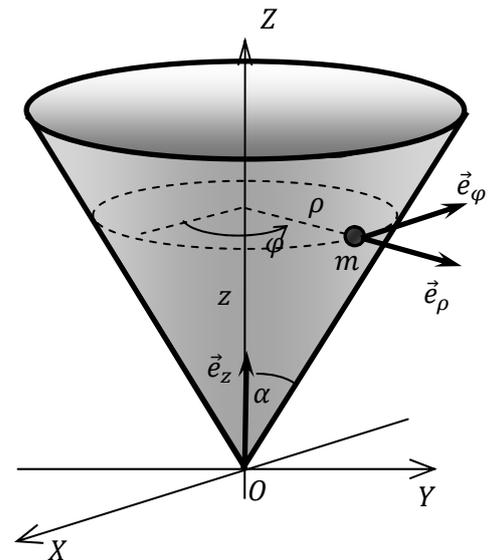
1. En choisissant la coordonnée généralisée q adéquate, calculer l'expression de l'énergie potentielle $U(q)$ et trouver les positions d'équilibre données par $\partial U(q)/\partial q = 0$.
2. En déduire les élongations Δl_A et Δl_B des deux ressorts quand le système est en équilibre.
3. Ecrire le Lagrangien \mathcal{L} du système.
4. Ecrire l'équation de Lagrange du système et en déduire l'équation du mouvement.
5. Quelle alors la pulsation propre du système ω_0 et la période des oscillations T .
6. Retrouver les équations du mouvement précédentes à partir des équations de Hamilton.
7. Application Numérique : Pour les questions 2 et 5.

$$l = 45 \text{ cm} ; l_0 = 15 \text{ cm} ; k = 20 \text{ N/m} ; m = 100 \text{ g} \text{ et } g = 10 \text{ m/s}^2.$$

EXERCICE 02: (10 points)

Dans la figure ci-contre une bille considérée comme étant une masse ponctuelle m glisse sans frottement à l'intérieur d'un cône de demi-angle au sommet α . Elle est repérée par ses coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) ,

La masse m est soumise au champ de pesanteur terrestre.



1. Quel est le nombre de degrés de liberté du système ?
2. Ecrire le Lagrangien \mathcal{L} du système.
3. Ecrire les équations de Lagrange du système et en déduire les équations du mouvement.
4. Trouver une variable cyclique du mouvement, puis en déduire une intégrale première du mouvement. Que représente cette valeur ?
5. Ecrire le Hamiltonien \mathcal{H} du système.
6. Le Hamiltonien est-il conservé ? pourquoi ? et que représente-t-il ?
7. A partir des équations de Hamilton, retrouver les équations du mouvement précédentes.