

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

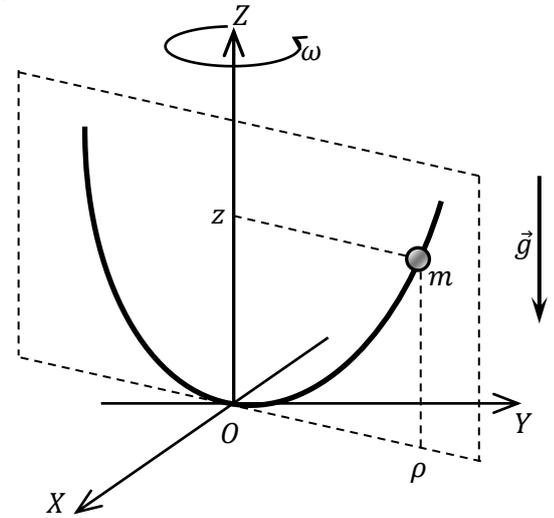
MODULE : MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

DURÉE : 01 Heure 30 Minutes.

EXERCICE 01: (10 points)

Une perle considérée comme une masse ponctuelle m est astreinte à se déplacer sans frottement sur un fil rigide contenu dans le plan vertical et ayant pour équation $z = \rho^2/2R$, tel que R est une constante positive et z et ρ sont les coordonnées cylindriques d'un point quelconque du fil.

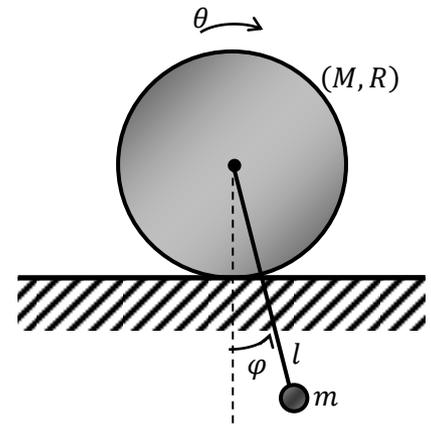
Le plan contenant le fil tourne autour de l'axe (OZ) avec une vitesse angulaire constante ω et la perle est soumise au champ de pesanteur $\vec{g} = -g \cdot \vec{e}_z$. (Figure ci-contre)



1. Ecrire le Lagrangien \mathcal{L} du système en prenant comme coordonnée généralisée ρ .
2. Ecrire l'équation de Lagrange du système et en déduire l'équation du mouvement.
3. En déduire la (ou les) position(s) d'équilibre $\rho_{\text{éq}}$ de la perle.
4. Calculer le Hamiltonien \mathcal{H} du système.
5. En écrivant les équations de Hamilton du système, retrouver l'équation du mouvement précédente.
6. Le Hamiltonien est-il une intégrale première du mouvement ? Pourquoi ?
7. Le Hamiltonien est-il égal à l'énergie mécanique totale ? Pourquoi ?
8. En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, trouver l'équation donnant la force appliquée par le fil sur la perle.

EXERCICE 02: (10 points)

Dans la figure ci-contre, un cylindre creux de masse M et de rayon R roule sans glissement sur un plan horizontal. Nous accrochons à l'axe du cylindre un pendule simple composé d'une masse ponctuelle m et d'une tige de longueur l et de masse négligeable. **Cette tige n'étant pas solidaire au cylindre**, l'angle φ que fait le pendule avec la verticale n'est pas égal à l'angle de rotation du cylindre noté θ et le pendule ne subit aucun frottement.



1. Ecrire la vitesse \vec{v}_m de la masse m et son module v_m dans le référentiel fixe (du sol). Cas de petites oscillations autour de $\varphi_{\text{éq}} = 0$: par la suite on prendra ($\cos \varphi \approx 1$) dans l'expression de v_m .
2. Ecrire le Lagrangien \mathcal{L} du système.
3. Ecrire les équations de Lagrange du système et en déduire les équations du mouvement.
4. Trouver l'expression de la pulsation propre des oscillations de **petites amplitudes** de la masse m autour de $\varphi_{\text{éq}} = 0$. Discuter les cas $(M = m)$ et $(M \gg m)$.
5. Ecrire les équations horaires du mouvement pour un ensemble initialement au repos avec $\varphi(t = 0) = \varphi_0$ et $\theta(t = 0) = 0$.
6. Trouver une variable cyclique du mouvement, puis en déduire une intégrale première du mouvement. Que représente cette valeur ?
7. Ecrire le Hamiltonien \mathcal{H} du système.