FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

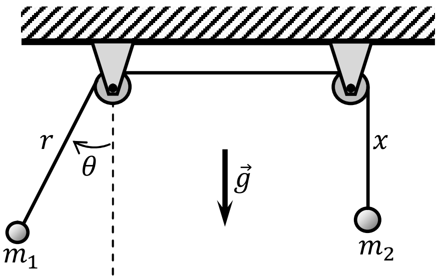
ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

MODULE : MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

DURÉE : 01 Heure 45 Minutes.

EXERCICE 01 : (12 points)

Le pendule d'Atwood (the Swinging Atwood's Machine) est constitué de deux masses m_1 et m_2 reliées entre elles par un fil inextensible, de masse négligeable, de longueur l, passant par deux poulies de masses et de rayons négligeables. L'ensemble est contenu dans le plan vertical et soumis à l'accélération de pesanteur $\vec{g}$. La masse m_1 peut osciller d'un angle θ par rapport à la verticale, tandis que la masse m_2 se déplace uniquement suivant sa verticale (figure ci-contre).



1. Ecrire la contrainte et définir toutes les variables en fonction des deux coordonnées polaires (r, θ) de la masse m_1.
2. Ecrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du système.
3. Ecrire les équations de Lagrange du système et en déduire les équations du mouvement.
4. Trouver les impulsions généralisées p_r et p_θ du système. Que représentent ces valeurs ?
5. Calculer le Hamiltonien $\mathcal{H}$ du système.
6. Ecrire les équations de Hamilton du système et retrouver les équations du mouvement précédentes.
7. Le Hamiltonien, est-il égal à l'énergie mécanique totale ? Pourquoi ?
8. Que peut-on dire sur p_r et p_θ quand $g = 0$?
9. En déduire la solution des équations du mouvement dans le cas où $g = 0$ on notera $r(0) = r_0$, $r^\bullet(0) = v_0$, $\theta(0) = \theta_0$, $\theta^\bullet(0) = \omega_0$.

EXERCICE 02 : (08 points)

Soit un système physique à un degré de liberté décrit par le Hamiltonien suivant

$$\mathcal{H}(q, p, t) = kq^2p^2$$

Tel que k est une constante positive. (q, p) sont les variables canoniquement conjugués.

1. Quelle est la dimension de la constante k (son unité dans le système $[\mathrm{MKSA}]$) ?
2. Ecrire les équations de Hamilton du système et trouver p en fonction de $q^\bullet$.
3. Trouver l'expression du Lagrangien $\mathcal{L}(q, q^\bullet, t)$ donnant le Hamiltonien précédent.
4. Le Hamiltonien, est-il conservé ? Pourquoi ?
5. A partir des équations de Hamilton, trouver l'équation du mouvement de la fonction q (utiliser $p = \sqrt{\mathcal{H}/kq^2}$).
6. En posant $q(t = 0) = q_0$, $p(t = 0) = p_0$, écrire le Hamiltonien en fonction de q_0 et p_0, puis résoudre l'équation trouvée en 5.