

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

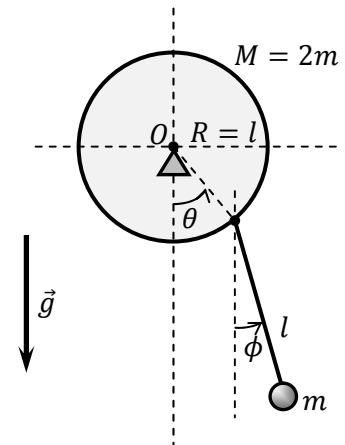
MODULE : MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

DURÉE : 01 Heure 30 Minutes.

EXERCICE 01 : (12 points)

Un **cylindre creux** de masse $M = 2m$ et de rayon $R = l$ tourne librement autour de son axe fixe O . Nous accrochons un pendule simple constitué d'une tige rigide de longueur l et de masse négligeable et d'une masse ponctuelle m en un point situé sur la surface du cylindre (figure ci-contre).

La tige n'étant pas solidaire au cylindre, elle ne tourne donc pas avec le même angle de rotation du cylindre et les frottements avec l'air sont négligeable.



1. Ecrire la vitesse \vec{v}_m de la masse m et son module v_m dans le référentiel fixe (Oxy) .

Dans le cas des oscillations de petites amplitudes autour de l'équilibre : On prendra $\cos(\theta - \phi) \approx 1$ dans l'expression de v_m .

2. Ecrire le Lagrangien \mathcal{L} du système.
3. Ecrire les équations de Lagrange du système et en déduire les équations du mouvement (pour les petits angles).
4. En posant les solutions particulières de ces équations sous la forme :

$$\theta(t) = A_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad ; \quad \phi(t) = A_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

trouver les pulsations propres du système.

5. Calculer les moments conjugués p_θ et p_ϕ en fonction de θ^\bullet et ϕ^\bullet .
6. Résoudre le système d'équations pour trouver θ^\bullet et ϕ^\bullet en fonction de p_θ et p_ϕ .
7. Calculer le Hamiltonien \mathcal{H} du système.
8. Que représente le Hamiltonien dans ce cas ? Pourquoi ?
9. Ecrire les équations de Hamilton du système et retrouver le système d'équations 3.

EXERCICE 02 : (08 points)

On donne le Lagrangien d'un système physique à un degré de liberté en fonction de la coordonnée généralisée q et de la vitesse généralisée q^\bullet .

$$\mathcal{L}(q, q^\bullet) = \frac{1}{2} k \left(\frac{q^\bullet}{q} \right)^2$$

Tel que k est une constante positive.

1. Quelle est la dimension de la constante k (son unité dans le système [MKSA]) ?
2. Trouver l'expression du Hamiltonien $\mathcal{H}(q, p, t)$ du système. (q, p) sont les variables canoniquement conjugués.
3. Le Hamiltonien, est-il conservé ? Pourquoi ?
4. Ecrire les équations de Hamilton du système.
5. A partir des équations de Hamilton, trouver l'équation du mouvement de la fonction q (utiliser les réponses trouvées en 2 et 3).
6. En posant $q(t = 0) = q_0$, $p(t = 0) = p_0$, écrire le Hamiltonien en fonction de q_0 et p_0 , puis résoudre l'équation trouvée en 5.