FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

DURÉE : 01 Heure 30 Minutes.

EXERCICE 01: (13 *points*)

Le système de la figure 01 est composé d'une masse ponctuelle m glissant sans frottement sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, ayant une masse M et pouvant lui-même glisser sans frottement sur un plan horizontal.

Nous notons X la position du plan incliné par rapport au référentiel fixe (OXY), et x est la distance que parcourt la masse m sur le plan incliné (par rapport au bord du plan incliné).

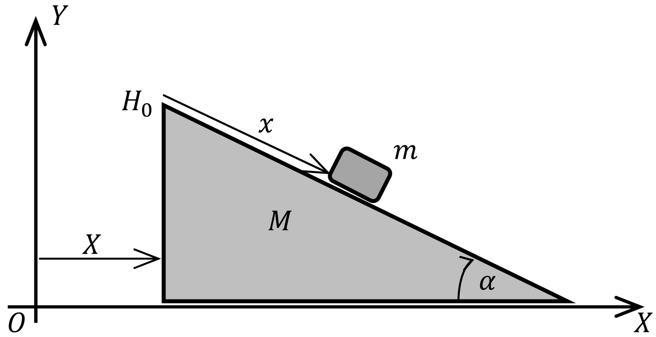

Figure 01.

1. Ecrire la vitesse $\vec{v}_m$ de la masse m et son module v_m dans le référentiel (OXY).
2. Ecrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du système.
3. Ecrire les équations de Lagrange du système.
4. En déduire les équations du mouvement. Quelle est la nature du mouvement du plan incliné et de la masse m ?
5. Trouver une variable cyclique du mouvement, puis en déduire une intégrale première du mouvement (constante par rapport au temps). Que représente cette valeur ?

6. Calculer les moments conjugués p_x et p_X en fonction de $x^\bullet$ et $X^\bullet$.
7. Résoudre le système d'équations pour trouver $x^\bullet$ et $X^\bullet$ en fonction de p_x et p_X.
8. Calculer le Hamiltonien $\mathcal{H}$ du système.
9. Ecrire les équations de Hamilton du système.
10. En déduire les expressions $p_x(t)$ et $p_X(t)$ en fonction du temps, puis les expressions de $x^\bullet(t)$ et $X^\bullet(t)$. On note $p_x(t=0) = p_{0x}$ et $p_X(t=0) = p_{0X}$.

EXERCICE 02: (07 *points*)

On considère un système ayant pour Hamiltonien

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2q^2}$$

Où p est le moment conjugué de la variable q.

1. Dire pourquoi $\mathcal{H}$ est une constante du mouvement.
2. Calculer les crochets de Poisson $\{q,\mathcal{H}\}$ et $\{p,\mathcal{H}\}$.
3. On définit la quantité

$$C(q,p,t) = \frac{qp}{2} - t.\mathcal{H}(q,p)$$

   Où t est la variable temps. Calculer le crochet de Poisson $\{C,\mathcal{H}\}$.
4. Ecrire les équations de Hamilton du système et comparer avec la question 2.
5. Montrer que C est une constante du mouvement. Aurions-nous pu déduire ce résultat à partir de la question 3 ?
6. En se servant du fait que $\mathcal{H}$ est C sont des constantes du mouvement, trouver $q(t)$. (Conditions initiales : $p(t=0) = 0$ et $q(t=0) = q_0$).