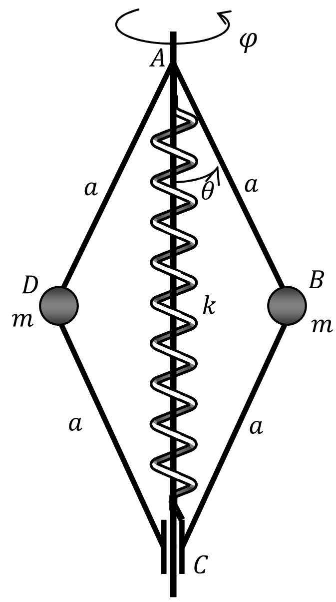
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

DURÉE : 01 Heure 30 Minutes.

EXERCICE 01: (12 *points*)



L'ensemble représenté dans la figure ci-contre est appelé régulateur de force centrifuge ou régulateur à boules.

Les tiges ayant la même longueur a sont de masses négligeables et forment le losange $ABCD$, le losange est articulé à ses quatre sommets de telle manière qu'il peut se déformer dans le plan vertical où il est placé.

Les masses égales à m sont ponctuelles et placées aux points B et D.

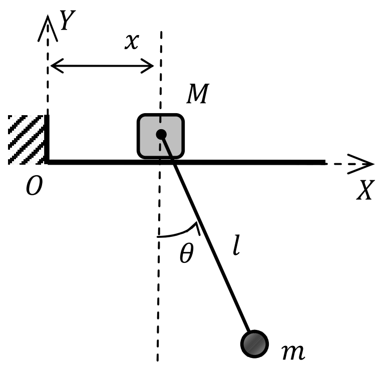
Le ressort fixé entre les points A et C à une constante de raideur k, une masse négligeable et une longueur à vide considérée comme nulle ($l_0 = 0$).

L'ensemble peut tourner ***librement*** autour de l'axe vertical AC. La hauteur du point A est fixe alors que le point C peut glisser librement sur l'axe de rotation. L'ensemble est soumis au champ gravitationnel terrestre.

L'angle de rotation par rapport à l'axe vertical est noté φ.

1. Quelle-est le nombre de degrés de liberté du système ? Choisir les coordonnées généralisées appropriées.
2. Ecrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du système (utiliser l'expression de la vitesse en coordonnées sphériques).
3. Ecrire les équations de Lagrange du système et en déduire les équations du mouvement.
4. Trouver une variable cyclique du mouvement, puis en déduire une intégrale première du mouvement (constante par rapport au temps). Que représente cette valeur ?
5. Trouver l'angle d'équilibre $\theta_{\text{équilibre}}$ du losange dans la cas où le système ne tourne pas ($\varphi^{\bullet} = 0$). (On pose $\theta^{\bullet\bullet}_{\text{équilibre}} = 0$)
6. Calculer le Hamiltonien $\mathcal{H}$ du système.
7. Ecrire les équations de Hamilton du système et retrouver les équations du mouvement précédentes.
8. Le Hamiltonien est-il une intégrale première du mouvement ? Pourquoi ? Que représente-t-il ?

EXERCICE 02: (08 *points*)



Le système de la figure ci-contre est composé d'une masse ponctuelle M glissant sans frottement sur un plan horizontal.

Nous accrochons à la masse M un pendule simple de longueur l et de masse m.

La position de la masse M est notée x et l'angle que fait le pendule avec la verticale est noté θ.

1. Ecrire la vitesse $\vec{v}_m$ de la masse m et son module v_m dans le référentiel lié au sol.
   pour les petites oscillations autour de $\theta_0 = 0$ nous prendrons $\cos\theta \approx 1$ dans l'expression de v_m.
2. Ecrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du système.
3. Ecrire les équations de Lagrange du système et en déduire les équations du mouvement.
4. Trouver une variable cyclique du mouvement, puis en déduire une intégrale première du mouvement. Que représente cette valeur ?
5. Trouver l'expression de la pulsation propre des petites oscillations autour de $\theta_0 = 0$ de la masse m.
6. Dans le cas où les vitesses initiales des deux masses sont nulles, écrire les équations horaires du mouvement.