FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

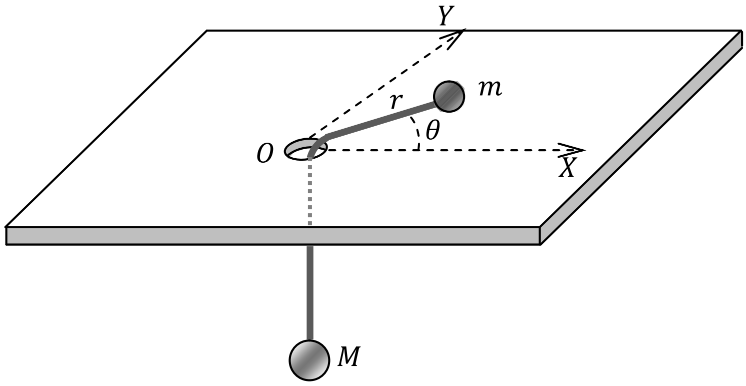
ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

DURÉE : 01 Heure 30 Minutes.

EXERCICE 01: (12 *points*)

On considère deux masses ponctuelles m et M, attachées entre elles par un fil inextensible de masse négligeable, passant par un petit trou dans un plan horizontal où se déplace la masse m. La masse M qui pend librement à l'autre bout du fil se déplace uniquement suivant l'axe vertical. On note l la longueur totale du fil, et r la longueur du segment horizontal. On note θ l'angle que fait le segment horizontal avec l'axe (OX).
En négligeant tous les frottements.



1. Ecrire la contrainte et montrer que le système possède deux degrés de liberté (on prendra les coordonnées généralisées (r, θ) définies par les coordonnées polaires du point m).
2. Ecrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du système.
3. Ecrire les équations de Lagrange du système et en déduire les équations du mouvement.
4. Trouver une variable cyclique du mouvement, puis en déduire une intégrale première du mouvement (constante par rapport au temps). Que représente cette valeur ?
5. Trouver l'équation différentielle de la variable r.
6. Montrer que le mouvement circulaire de m est une solution possible de cette équation. Quel est dans ce cas le rayon de la trajectoire pour une vitesse initiale V_0 ?
7. Calculer le Hamiltonien $\mathcal{H}$ du système.
8. Ecrire les équations de Hamilton du système et retrouver les équations du mouvement précédentes.
9. Le Hamiltonien est-il une intégrale première du mouvement ? Pourquoi ?
10. Le Hamiltonien est-il égal à l'énergie mécanique totale ? Pourquoi ?

EXERCICE 02: (08 *points*)

On considère un système décrit par le Hamiltonien $\mathcal{H}(q,p)$ en fonction des variables canoniquement conjuguées (q,p). Tel que

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{\alpha^2}{2m}\frac{p^2}{q^2} - \beta . q^2$$

Où α, β et m sont des constantes positives.

1. Dire pourquoi $\mathcal{H}$ est une constante du mouvement.
2. Ecrire les équations de Hamilton pour les variables (q,p).
3. On considère la transformation suivante des anciennes variables (q,p) aux nouvelles variables (Q,P)

$$Q = \frac{q^2}{2\alpha} \quad \text{et} \quad P = \alpha\frac{p}{q}$$

   Cette transformation est-elle canonique ?
4. Calculer le nouvel Hamiltonien $H(Q,P)$.
5. Déterminer les équations de Hamilton pour les nouvelles variables et calculer $Q(t)$ et $P(t)$. On note les conditions initiales $Q(0) = Q_0$ et $P(0) = P_0$.
6. Trouver alors la solution du problème originel, $q(t)$ et $p(t)$.
7. Quelle est l'utilité de cette transformation ?