FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

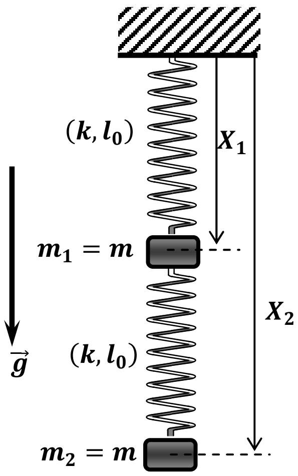
ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

DURÉE : 01 Heure 45 Minutes.

EXERCICE 01: (12 points)

Soit le système décrit par la figure ci-contre, il est composé de deux ressorts identiques de longueurs à vide l_0 et de constantes de raideurs k chacun. Le premier ressort est accroché à un bâti par une de ces extrémités et à l'autre extrémité on accroche une masse ponctuelle $m_1 = m$, l'autre ressort est accroché à la masse m_1 par une de ces extrémités et à l'autre extrémité on accroche une masse ponctuelle $m_2 = m$. Les axes des ressort et le déplacement des masses ponctuelles sont toujours parallèles à la verticale et l'ensemble est soumis à l'accélération de pesanteur $\vec{g}$. On choisit comme coordonnées généralisées, du système à deux degrés de libertés, les positions verticales X_1 et X_2 ayants pour origine l'extrémité supérieure du premier ressort.



1. Ecrire l'expression de l'énergie potentielle en fonction de X_1 et X_2.
2. Trouver les positions d'équilibre $X_{1\text{équ}}$ et $X_{2\text{équ}}$ des deux masses ponctuelles.
3. On pose $x_1 = X_1 - X_{1\text{équ}}$ et $x_2 = X_2 - X_{2\text{équ}}$ les positions des deux masses par rapport à leurs positions d'équilibre. Monter que l'énergie potentielle s'écrit sous la forme :
$$U = \frac{1}{2}k.x_1^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 + \text{Constante}$$

En utilisant les coordonnées généralisées (x_1, x_2).

4. Ecrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du système.
5. Ecrire les équations de Lagrange et en déduire les équations du mouvement (on pose : $\omega_0^2 = k/m$).
6. En posant les solutions de ce système d'équations différentielles
$$x_1 = A_1.\sin(\omega t + \varphi) \quad ; \quad x_2 = A_2.\sin(\omega t + \varphi)$$
Trouver les pulsations propres du système $\omega_{\text{Harmonique}}$ et $\omega_{\text{Fondamentale}}$.
7. Calculer A_1 en fonction de A_2 pour ces deux pulsations, puis écrire la forme générale des solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

EXERCICE 02: (08 points)

Soit un système à deux degrés de liberté décrit par le Lagrangien suivant
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - \frac{1}{2}\omega_0^2(q_1^2 + q_2^2) + \alpha.q_1q_2$$
(q_1, q_2) sont les coordonnées généralisées du système. ω_0 et α des constantes positives $(\omega_0^2 > \alpha)$.

1. Ecrire les équations du mouvement du système.
2. On pose le changement de coordonnées $q_1 = Q_1 + Q_2$ et $q_2 = Q_1 - Q_2$. Montrer, alors, que le système d'équations précédent se ramène à un système de deux oscillateurs harmoniques découplés.
3. Trouver les solutions de ce système. En déduire $q_1(t)$ et $q_2(t)$.
4. Exprimer le Hamiltonien du système $\mathcal{H}$ en fonction de (q_1, q_2) et de leurs conjuguées (p_1, p_2).
5. Ecrire le nouveau Lagrangien $L(Q_1, Q_2, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2)$.
6. En déduire les moments conjugués de (Q_1, Q_2) notés (P_1, P_2).
7. Exprimer (p_1, p_2) en fonction de (P_1, P_2) et vérifier, en utilisant les crochets de Poisson, que la transformation $(q_1, q_2, p_1, p_2) \rightarrow (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ est bien une transformation canonique.