FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

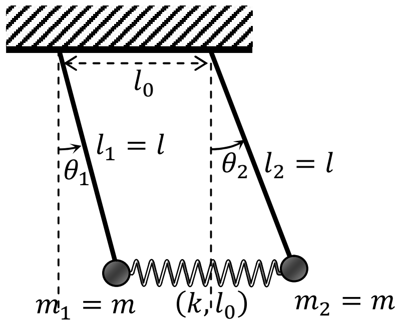
ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

DURÉE : 01 Heure 45 Minutes.

EXERCICE 01 : (10 points)

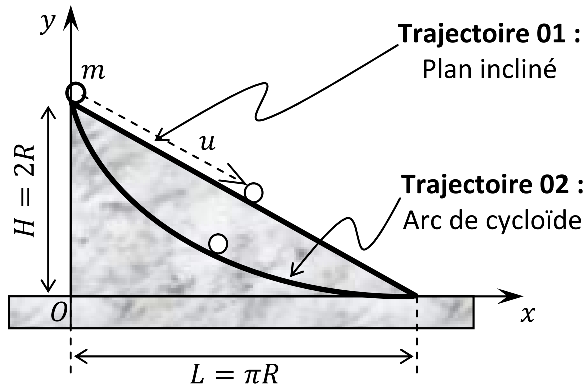
La figure ci-contre représente un pendule couplé constitué de deux pendules simples identiques (m, l) dont les masses ont été reliés avec un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. Les axes des pendules sont séparés par une distance l_0 de telle manière qu'à l'équilibre $\theta_{1\text{éq}} = \theta_{2\text{éq}} = 0$.



1. Ecrire le Lagrangien du système dans le cas des oscillations de faibles amplitudes (les approximation d'usage : $\sin(\theta) \approx \theta$ et $\cos(\theta) \approx 1 - \theta^2/2$).
2. A partir des équations de Lagrange, trouver les équations du mouvement.
3. En posant les solutions de ces équations sous la forme :
$$\theta_1(t) = A_1.\sin(\omega.t + \varphi) \quad \text{et} \quad \theta_2(t) = A_2.\sin(\omega.t + \varphi)$$
Trouver les pulsations propres du système.
4. Calculer A_2 en fonction de A_1 pour ces deux pulsations.
5. On pose le changement de coordonnées $\theta_1 = q_1 + q_2$ et $\theta_2 = q_1 - q_2$. Montrer, alors, que le système d'équations de la question 2 se ramène à un système de deux oscillateurs harmoniques découplés. Quelles-sont les pulsations propres de ces deux oscillateurs ?

EXERCICE 02 : (10 points)

Un point matériel de masse m est lâché sans vitesse initiale à partir d'une hauteur H. Le mobile peut suivre deux trajectoire différentes (figure ci-contre).



Trajectoire 01 : plan incliné de hauteur $H = 2R$ et de largeur $L = \pi R$.

Trajectoire 02 : surface dont la section est un arc de cycloïde définit par les équations paramétriques suivantes
$$\begin{cases} x = R.\phi - R.\sin\phi \\ y = R + R.\cos\phi \end{cases}$$
Tel que ϕ est un paramètre qui varie de 0 à π.

On néglige tous les frottements, et l'accélération de pesanteur est notée g.

Trajectoire 01 :

1. En utilisant le formalisme de Hamilton, trouver l'équation du mouvement (prendre comme coordonnée généralisée la position suivant la trajectoire notée u).
2. En déduire l'équation horaire $u(t)$, puis les équations $x(t)$ et $y(t)$ suivant les axes (Ox) et (Oy).
3. Ecrire en fonction de R et g le temps t_1 mis par point matériel pour arriver en bas du plan incliné.

Trajectoire 02 :

4. Calculer le Lagrangien du point matériel en prenant comme coordonnée généralisée le paramètre ϕ.
5. Justifier, à partir des propriétés du Hamiltonien, que l'énergie mécanique totale soit conservée.
6. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique totale et les conditions initiales ($\phi(0) = 0$, $\dot{\phi}(0)=0$, Trouver l'expression de $\dot{\phi}(t)$ en fonction de t.
7. En déduire l'équation horaire $\phi(t)$, puis les équations $x(t)$ et $y(t)$ suivant les axes (Ox) et (Oy).
8. Ecrire en fonction de R et g le temps t_2 mis par point matériel pour arriver en bas de la trajectoire.
9. Comparer t_1 et t_2.