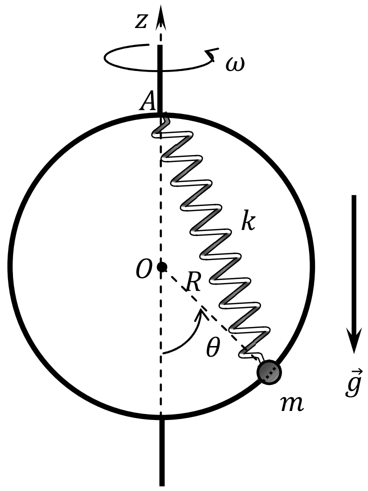
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

DURÉE : 01 Heure 45 Minutes.

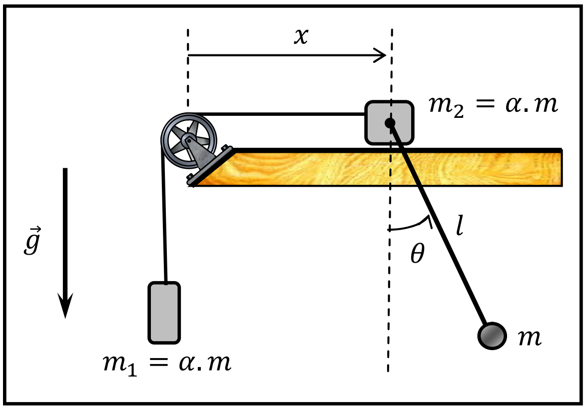
EXERCICE 01 : (10 points)



Une perle de masse m, que nous assimilerons à un point matériel, glisse sans frottement le long d'un anneau de rayon R contenu dans le plan vertical. Elle est soumise a son poids, ainsi qu'à la force de rappel d'un ressort, fixé en A, de constante de raideur k et de longueur à vide nulle $(l_0 = 0)$. Le cerceau tourne autour de son axe vertical (Oz) avec une vitesse angulaire $(\varphi^{\bullet} = \omega = \text{constante})$ et la position angulaire de la bille sur le cerceau est notée θ comme le montre la figure ci-contre. Les masses du cerceau et du ressort sont négligeables.

1. Ecrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du système (utiliser les coordonnées sphériques pour la vitesse du point m).
2. Ecrire l'équation (ou les équations) de Lagrange du système et en déduire l'équation du mouvement.
3. Discuter suivant les valeurs de ω les positions d'équilibres de la bille le long du cerceau $(\theta^{\bullet\bullet}_{\text{équilibre}} = 0)$.
4. A quelle condition nous avons des oscillations de faible amplitudes $(\theta \ll 0)$ autours de $(\theta = 0)$?
5. Quelle est dans ce cas la pulsation de ces oscillations ?
6. Calculer le Hamiltonien $\mathcal{H}$ du système.
7. Ecrire les équations de Hamilton du système et retrouver l'équation du mouvement trouvée en 2.

EXERCICE 02 : (10 points)



Dans la figure ci-contre la masse ponctuelle m_2 glisse sans frottements sur un plan horizontal, elle est reliée à une masse ponctuelle m_1, qui pend verticalement, par un fil inextensible et de masse négligeable passant par la gorge d'une poulie de masse négligeable. On accroche à la masse un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle m et d'une tige rigide de longueur l et de masse négligeable.

Le pendule est soumis à l'attraction terrestre, et oscille librement dans le plan vertical.

On pose : $m_1 = m_2 = \alpha.m$

1. Trouver la vitesse $\vec{v}_m$ de la masse m et son module v_m dans le référentiel lié au sol. (Dans le cas d'oscillations de petites amplitudes de la masse m, on prendra $\cos\theta \approx 1$).
2. Ecrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du système en utilisant les coordonnées généralisées (x, θ).
3. Ecrire les équations de Lagrange du système et en déduire les équations du mouvement. (Utiliser les approximations dans le cas d'oscillations de petites amplitudes de m)
4. En remplaçant $x^{\bullet\bullet}$, trouver l'équation différentielle du mouvement du pendule (fonction θ).
5. En déduire l'équation horaire du mouvement du pendule $\theta(t)$ pour un système initialement au repos.
6. Que deviennent les équations du mouvements trouvées en 3, dans le cas où $\alpha \gg 1$ (m_1 et m_2 très grands par rapport à m) ? Commenter.