FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

MODULE : MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

EXERCICE 01: (06 *points*)

1. ***Nombre de degrés de liberté.***

Solide roulant dans le plan :
02 degrés de liberté pour sons centre de masse + 01 degré de liberté pour la rotation.

Contraintes : 02 contraintes.
Le cylindre est astreint à rouler dans une cavité cylindrique (courbe) + roulement sans glissement.

03 degrés de liberté – 02 contraintes $\Rightarrow$ $\boxed{\text{un (01) seul degré de liberté}}$.

Coordonnée généralisée : variable θ

2. ***Condition de roulement sans glissement.***

$$R_\theta.\theta = R_\varphi.\varphi \quad \Rightarrow \quad \boxed{R.\theta = a.\varphi} \quad \text{et} \quad \boxed{R.\theta^\bullet = a.\varphi^\bullet}$$

3. ***Ecrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du système.***

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$T = \frac{1}{2}M.v_{cdm}^2 + \frac{1}{2}I.\omega^2 \qquad \text{et} \qquad U = Mgh_{cdm}$$

Avec

$$v_{cdm} = (R-a).\theta^\bullet \quad ; \quad \omega = \varphi^\bullet = \frac{R}{a}\theta^\bullet \quad ; \quad I = \frac{1}{2}M.a^2 \quad ; \quad h_{cdm} = -(R-a).\cos\theta$$

Donc

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M(R-a)^2.\theta^{\bullet 2} + \frac{1}{4}MR^2.\theta^{\bullet 2} + Mg(R-a).\cos\theta$$

Et

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\left[(R-a)^2 + \frac{1}{2}R^2\right].\theta^{\bullet 2} + Mg(R-a).\cos\theta}$$

4. ***Equation d'Euler-Lagrange du système.***

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^\bullet}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

Avec

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^\bullet} = M\left[(R-a)^2 + \frac{1}{2}R^2\right].\theta^\bullet \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^\bullet}\right) = M\left[(R-a)^2 + \frac{1}{2}R^2\right].\theta^{\bullet\bullet}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -Mg(R-a).\sin\theta$$

En remplaçant

$$M\left[(R-a)^2 + \frac{1}{2}R^2\right].\theta^{\bullet\bullet} + Mg(R-a).\sin\theta = 0$$

D'où l'équation du mouvement

$$\boxed{\left[(R-a)^2 + \frac{1}{2}R^2\right].\theta^{\bullet\bullet} + g(R-a).\sin\theta = 0}$$

5. ***Cas des petites oscillations.***

Pour les angles petits : $\sin\theta \approx \theta$

$$\left[(R-a)^2+\frac{1}{2}R^2\right].\ddot{\theta}+g(R-a).\theta=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta}=-\frac{g(R-a)}{(R-a)^2+\frac{1}{2}R^2}\theta}$$

La pulsation des oscillations libre

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g(R-a)}{(R-a)^2+\frac{1}{2}R^2}}$$

Et la période des petites oscillations libres

$$\boxed{T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{(R-a)^2+\frac{1}{2}R^2}{g(R-a)}}}$$

6. ***Hamiltonien.***

$$p_\theta=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}=M\left[(R-a)^2+\frac{1}{2}R^2\right].\dot{\theta} \qquad \text{et} \qquad \dot{\theta}=\frac{1}{M\left[(R-a)^2+\frac{1}{2}R^2\right]}p_\theta$$

$$\mathcal{H}(\theta,p_\theta,t)=p_\theta\dot{\theta}-\mathcal{L}$$

En remplaçant

$$\mathcal{H}(\theta,p_\theta,t)=\frac{1}{M\left[(R-a)^2+\frac{1}{2}R^2\right]}p_\theta^2-\left(\frac{\frac{1}{2}M\left[(R-a)^2+\frac{1}{2}R^2\right]}{M^2\left[(R-a)^2+\frac{1}{2}R^2\right]^2}p_\theta^2+Mg(R-a).\cos\theta\right)$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{H}(\theta,p_\theta)=\frac{1}{2}\frac{1}{M\left[(R-a)^2+\frac{1}{2}R^2\right]}p_\theta^2-Mg(R-a).\cos\theta}$$

On remarquera que

$$T=\frac{1}{2}M\left[(R-a)^2+\frac{1}{2}R^2\right].\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}\frac{1}{M\left[(R-a)^2+\frac{1}{2}R^2\right]}p_\theta^2 \qquad \text{et} \qquad U=-Mg(R-a).\cos\theta$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{H}=T+U=E_m}$$

Le Hamiltonien représente l'énergie mécanique totale du cylindre.

Cette énergie est conservée, car le Hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps.

EXERCICE 02 : (07 *points*)

1. ***Nombre de degrés de liberté.***

Point matériel dans l'espace : 03 degrés de liberté.

Contraintes : 02 contraintes.
La bille se déplace dans un cerceau $r = R = \text{constante}$.
Le cerceau tourne avec une vitesse angulaire constante $\varphi^\bullet = \omega = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \omega t$.

03 degrés de liberté – 02 contraintes $\Rightarrow$ $\boxed{\text{un (01) seul degré de liberté}}$.

Coordonnée généralisée : variable θ (coordonnées sphériques).

2. ***Ecrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du système.***

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{et} \qquad U = mgh$$

Avec

$$\vec{v} = r^\bullet \vec{e}_r + r\theta^\bullet \vec{e}_\theta + r.\sin\theta\,\varphi^\bullet \vec{e}_\varphi = R\theta^\bullet \vec{e}_\theta + R\omega.\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \quad \Rightarrow \quad v^2 = R^2\theta^{\bullet 2} + R^2\omega^2.\sin^2\theta$$

$$h = -R.\cos(\pi - \theta) = +R.\cos\theta$$

(Origine des énergies potentielle passant par O le centre du cerceau)

Donc

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2\theta^{\bullet 2} + \frac{1}{2}mR^2\omega^2.\sin^2\theta - mgR.\cos\theta}$$

3. ***Equation d'Euler-Lagrange du système.***

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^\bullet}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

Avec

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^\bullet} = mR^2.\theta^\bullet \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^\bullet}\right) = mR^2.\theta^{\bullet\bullet}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = mR^2\omega^2.\sin\theta\cos\theta + mgR.\sin\theta$$

En remplaçant

$$mR^2.\theta^{\bullet\bullet} - mR^2\omega^2.\sin\theta\cos\theta + mgR.\sin\theta = 0$$

D'où l'équation du mouvement

$$\boxed{\theta^{\bullet\bullet} - \omega^2.\sin\theta\cos\theta - \frac{g}{R}\sin\theta = 0}$$

4. ***Positions d'équilibre*** $\left(\boldsymbol{\theta^{\bullet\bullet}_{\text{équilibre}} = 0}\right)$.

D'après l'équation du mouvement

$$\omega^2.\sin\theta_{\text{éq}}\cos\theta_{\text{éq}} + \frac{g}{R}\sin\theta_{\text{éq}} = 0 \quad \text{ou} \quad \boxed{\sin\theta_{\text{éq}}.\left(\cos\theta_{\text{éq}} + \frac{g}{R\omega^2}\right) = 0}$$

Les positions d'équilibre triviales :

$$\sin\theta_{\text{éq}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{\text{éq}} = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{\theta_{\text{éq}} = \pi}$$

Correspondent réciproquement, au point le plus haut et au point le plus bas du cerceau.

La position d'équilibre non triviale :

$$\cos\theta_{éq} = -\frac{g}{R\omega^2} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\theta_{éq} = \arccos\left(-\frac{g}{R\omega^2}\right)}$$

Puisque $\cos\theta_{éq} \geq -1$ cette position ne peut être obtenue que pour $R\omega^2 \geq g$ donc $\boxed{\omega \geq \sqrt{g/R}}$.

5. ***Formalisme de Hamilton.***

$$p_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta^\bullet} = mR^2.\theta^\bullet \qquad \text{et} \qquad \theta^\bullet = \frac{p_\theta}{mR^2}$$

$$\mathcal{H}(\theta, p_\theta, t) = p_\theta\theta^\bullet - \mathcal{L}$$

En remplaçant

$$\mathcal{H}(\theta, p_\theta, t) = \frac{p_\theta^2}{mR^2} - \left(\frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{mR^2} + \frac{1}{2}mR^2\omega^2.\sin^2\theta - mgR.\cos\theta\right)$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{H}(\theta, p_\theta) = \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{mR^2} - \frac{1}{2}mR^2\omega^2.\sin^2\theta + mgR.\cos\theta}$$

Les équations de Hamilton

$$\begin{cases} \theta^\bullet = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dfrac{p_\theta}{mR^2} \\ p_\theta^\bullet = -\dfrac{\partial H}{\partial\theta} = mR^2\omega^2.\sin\theta\cos\theta + mgR.\sin\theta \end{cases}$$

En dérivant la première équation

$$\theta^{\bullet\bullet} = \frac{p_\theta^\bullet}{mR^2}$$

Et en remplaçant par la deuxième équation

$$\boxed{\theta^{\bullet\bullet} = \omega^2.\sin\theta\cos\theta + \frac{g}{R}\sin\theta}$$

Qui est l'équation différentielle du mouvement retrouvée précédemment.

EXERCICE 03 : (07 *points*)

1. ***Oscillateur harmonique à une dimension.***

Energie potentielle : $U(q) = \frac{1}{2}k.q^2 = \frac{1}{2}m\omega^2.q^2$

Energie cinétique : $T(q^\bullet) = \frac{1}{2}m.q^{\bullet 2}$

$$\boxed{\mathcal{L}(q,q^\bullet) = T - U = \frac{1}{2}m.q^{\bullet 2} - \frac{1}{2}m\omega^2.q^2}$$

2. ***Hamiltonien.***

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\bullet} = mq^\bullet \qquad \text{et} \qquad q^\bullet = \frac{p}{m}$$

$$\mathcal{H}(q,p,t) = pq^\bullet - \mathcal{L}$$

Donc

$$\mathcal{H}(q,p,t) = \frac{p^2}{m} - \left(\frac{1}{2}\frac{p^2}{m} - \frac{1}{2}m\omega^2.q^2\right) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + \frac{1}{2}m\omega^2.q^2}$$

3. ***Transformation.***

$$p = \sqrt{2m\omega.P}.\cos Q \quad \text{et} \quad q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}.\sin Q$$

Pour que la transformation soit canonique, elle doit vérifier : $\{q,p\}_{Q,P} = \{Q,P\}_{q,p} = 1$

$$\{q,p\}_{Q,P} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q}$$

$$\frac{\partial q}{\partial Q} = \frac{\partial}{\partial Q}\left(\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}.\sin Q\right) = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}.\cos Q \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial Q} = \frac{\partial}{\partial Q}\left(\sqrt{2m\omega.P}.\cos Q\right) = -\sqrt{2m\omega.P}.\sin Q$$

$$\frac{\partial q}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\left(\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}.\sin Q\right) = \frac{1}{\sqrt{2m\omega.P}}\sin Q \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\left(\sqrt{2m\omega.P}.\cos Q\right) = \sqrt{\frac{m\omega}{2P}}.\cos Q$$

En remplaçant

$$\{q,p\}_{Q,P} = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}.\cos Q\,\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}.\cos Q + \frac{1}{\sqrt{2m\omega.P}}\sin Q\,\sqrt{2m\omega.P}.\sin Q$$

Donc

$\{q,p\}_{Q,P} = \cos^2 Q + \sin^2 Q = 1$ **<u>la transformation est canonique</u>**.

4. ***Ecrire les équations de Hamilton du système.***

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + \frac{1}{2}m\omega^2.q^2$$

En remplaçant q et p.

$$H(Q,P) = \frac{1}{2m}2m\omega.P.\cos^2 Q + \frac{1}{2}m\omega^2\frac{2P}{m\omega}\sin^2 Q = \omega.P.(\cos^2 Q + \sin^2 Q)$$

D'où

$$\boxed{H(Q,P) = \omega.P}$$

5. ***Equations de Hamilton.***

$$\begin{cases} Q^{\bullet} = \dfrac{\partial H}{\partial P} = \omega \\ P^{\bullet} = -\dfrac{\partial H}{\partial Q} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q = \omega t + Q_0 \\ P = P_0 \end{cases}$$

Q_0 et P_0 sont des constantes d'intégrations déterminée à partir des conditions initiales.

6. ***Solution en q et p. En remplaçant :***

$$\boxed{q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}.\sin Q = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega}}.\sin(\omega t + Q_0)}$$

et

$$\boxed{p = \sqrt{2m\omega.P}.\cos Q = \sqrt{2m\omega.P_0}.\cos(\omega t + Q_0)}$$