FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

MODULE : MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

EXERCICE 01: (10 *points*)

1. ***Coordonnée généralisée.***

Le point matériel se déplaçant sur une droite donc le système possède un (01) seul degré de liberté.

Coordonnée généralisée : hauteur du point matériel z par rapport à l'origine prise au point B.

$$U = mgh + \frac{1}{2}k.(\Delta l_A)^2 + \frac{1}{2}k.(\Delta l_B)^2$$

Avec

$$h = z \quad ; \quad \Delta l_A = (AB - z) - l_0 \quad ; \quad \Delta l_B = z - l_0$$

Donc

$$U(z) = mg.z + \frac{1}{2}k.\{(l - z - l_0)^2 + (z - l_0)^2\}$$

Et

$$\boxed{U(z) = mg.z + \frac{1}{2}k.(2.z^2 - 2l.z + l^2 + 2.l_0^2 + 2ll_0)}$$

La position d'équilibre est donnée par

$$\left.\frac{\partial U(z)}{\partial z}\right|_{z=z_0} = mg + 2k.z_0 - kl = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{z_0 = \frac{l}{2} - \frac{mg}{2k}}$$

2. ***Elongation des ressorts à l'équilibre.***

$$\boxed{\Delta l_A = (l - z_0) - l_0 = \frac{l}{2} + \frac{mg}{2k} - l_0} \quad ; \quad \boxed{\Delta l_B = z_0 - l_0 = \frac{l}{2} - \frac{mg}{2k} - l_0}$$

3. ***Ecrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du système.***

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$T = \frac{1}{2}m.v^2 = \frac{1}{2}m.z^{\bullet 2} \qquad \text{et} \qquad U(z) = mg.z + \frac{1}{2}k.(2.z^2 - 2l.z + l^2 + 2.l_0^2 + 2ll_0)$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}m.z^{\bullet 2} - mg.z - \frac{1}{2}k.(2.z^2 - 2l.z)}$$

L'énergie potentielle étant définie à une constante près.

4. ***Equation d'Euler-Lagrange du système.***

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^\bullet}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0$$

Avec

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^\bullet} = m.z^\bullet \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^\bullet}\right) = m.z^{\bullet\bullet} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -mg - 2k.z + kl$$

En remplaçant

$$m.z^{\bullet\bullet} + mg + 2k.z - kl = 0$$

En utilisant la condition à l'équilibre $(mg + 2k.z_0 - kl = 0)$, nous avons :

$$m.z^{\bullet\bullet} + 2k.(z - z_0) = 0$$

Nous définissons la positions par rapport au point d'équilibre par $u = z - z_0$ et $u^{\bullet\bullet} = z^{\bullet\bullet}$.
D'où l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique

$$\boxed{u^{\bullet\bullet} + \frac{2k}{m}u = 0}$$

5. *La pulsation des oscillations libre.*

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{2k/m}}$$

Et la période des petites oscillations libres

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}}$$

6. *Hamiltonien.*

$$p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^{\bullet}} = m.z^{\bullet} \qquad \text{et} \qquad z^{\bullet} = \frac{p_z}{m}$$

$$\mathcal{H}(z, p_z, t) = p_z z^{\bullet} - \mathcal{L}$$

En remplaçant

$$\mathcal{H}(z, p_z, t) = \frac{p_z^2}{m} - \left(\frac{1}{2}m.\left(\frac{p_z}{m}\right)^2 - mg.z - \frac{1}{2}k.(2.z^2 - 2l.z)\right)$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{H}(z, p_z, t) = \frac{1}{2}\frac{p_z^2}{m} + mg.z + \frac{1}{2}k.(2.z^2 - 2l.z)}$$

On remarquera que

$$\mathcal{H} = T + U = E_m$$

Le Hamiltonien représente l'énergie mécanique totale.
Cette énergie est conservée, car le Hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps.

Les équations de Hamilton

$$\begin{cases} z^{\bullet} = \dfrac{\partial H}{\partial p_z} = \dfrac{p_z}{m} \\ p_z^{\bullet} = -\dfrac{\partial H}{\partial z} = -mg - 2k.z + kl \end{cases}$$

En dérivant la première équation

$$z^{\bullet\bullet} = \frac{p_z^{\bullet}}{m} = \frac{-mg - 2k.z + kl}{m}$$

Ce qui redonne l'équation différentielle du mouvement retrouvée précédemment.

$$m.z^{\bullet\bullet} + mg + 2k.z - kl = 0 \qquad \text{ou} \qquad m.z^{\bullet\bullet} + 2k.(z - z_0) = 0$$

7. *Application numérique* :

$$\boxed{\Delta l_A = 0{,}1\, m = 10\, cm} \quad ; \quad \boxed{\Delta l_B = 0{,}05\, m = 5\, cm}$$

$$\boxed{\omega_0 = 20\ rad/s} \quad ; \quad \boxed{T = 0{,}314\, s}$$

EXERCICE 02 : **(10 *points*)**

1. ***Nombre de degrés de liberté.***

Point matériel dans l'espace : 03 degrés de liberté.

Contraintes : 01 contrainte (le point est astreint à se déplacer sur une surface).

03 degrés de liberté – 01 contrainte $\Rightarrow$ deux (02) degrés de liberté.

Coordonnées généralisées : (φ, z) (coordonnées cylindriques).

2. ***Ecrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du système.***

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{et} \qquad U = mgh = mg.z$$

Pour un cône de demi-angle au sommet α (α = constante), $\rho = z.\tan\alpha$

$$\vec{v} = \rho^\bullet \vec{e}_\rho + \rho\varphi^\bullet \vec{e}_\varphi + z^\bullet \vec{e}_z = \tan\alpha\,.z^\bullet \vec{e}_r + \tan\alpha\,.z.\varphi^\bullet \vec{e}_\varphi + z^\bullet \vec{e}_z$$

Donc

$$v^2 = (\tan\alpha^2 + 1).z^{\bullet 2} + \tan\alpha^2 z^2.\varphi^{\bullet 2}$$

Et

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\tan\alpha^2 + 1).z^{\bullet 2} + \frac{1}{2}m\tan\alpha^2 z^2.\varphi^{\bullet 2} - mg.z}$$

3. ***Equation d'Euler-Lagrange du système.***

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^\bullet}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial z^\bullet}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(m\tan\alpha^2 z^2.\varphi^\bullet) - 0 = 0 \\ \dfrac{d}{dt}(m(\tan\alpha^2 + 1).z^\bullet) - m\tan\alpha^2 z.\varphi^{\bullet 2} + mg = 0 \end{cases}$$

En dérivant

$$\boxed{\begin{cases} 2z^\bullet.\varphi^\bullet + z.\varphi^{\bullet\bullet} = 0 \\ (\tan\alpha^2 + 1).z^{\bullet\bullet} - \tan\alpha^2 z.\varphi^{\bullet 2} + g = 0 \end{cases}}$$

4. ***Variable cyclique.***

$\varphi^\bullet$ apparait dans l'expression du Lagrangien alors que φ n'apparait pas. φ est donc une variable cyclique.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^\bullet}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^\bullet} = p_\varphi = m\tan\alpha^2 z^2.\varphi^\bullet = \text{constante}}$$

$p_\varphi = m\tan\alpha^2 z^2.\varphi^\bullet$ est la projection du moment cinétique suivant l'axe (OZ).

5. ***Hamiltonien.***

$$\begin{cases} p_\varphi = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^\bullet} = m\tan\alpha^2 z^2.\varphi^\bullet \\ p_z = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial z^\bullet} = m(\tan\alpha^2 + 1).z^\bullet \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi^\bullet = \dfrac{p_\varphi}{m\tan\alpha^2 z^2} \\ z^\bullet = \dfrac{p_z}{m(\tan\alpha^2 + 1)} \end{cases}$$

$$\mathcal{H}(\varphi, p_\varphi, z, p_z, t) = p_\varphi\varphi^\bullet + p_z z^\bullet - \mathcal{L}$$

En remplaçant

$$\mathcal{H} = \frac{p_\varphi^2}{m\tan\alpha^2 z^2} + \frac{p_z^2}{m(\tan\alpha^2 + 1)} - \left(\frac{1}{2}\frac{p_z^2}{m(\tan\alpha^2 + 1)} + \frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{m\tan\alpha^2 z^2} - mg.z\right)$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{H}(\varphi, p_\varphi, z, p_z) = \frac{1}{2}\frac{p_z^2}{m(\tan\alpha^2+1)} + \frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{m\tan\alpha^2 z^2} + mg.z}$$

6. ***Conservation*.**

Le Hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, donc il est conservée : c'est une intégrale première du mouvement.
Puisque la position et l'énergie potentielle ne dépendent que des coordonnées généralisées, alors le Hamiltonien est égal à l'énergie mécanique totale du système.

7. ***Les équations de Hamilton.***

$$\begin{cases} \varphi^\bullet = \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{m\tan\alpha^2 z^2} \\ p_\varphi^\bullet = -\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z^\bullet = \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_z} = \dfrac{p_z}{m(\tan\alpha^2+1)} \\ p_z^\bullet = -\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial z} = \dfrac{p_\varphi^2}{m\tan\alpha^2 z^3} - mg \end{cases}$$

En dérivant la première équation de chaque ensemble par rapport au temps

$$\varphi^{\bullet\bullet} = \frac{p_\varphi^\bullet}{m\tan\alpha^2 z^2} - 2\frac{p_\varphi}{m\tan\alpha^2 z^3} = 0 - 2\frac{m\tan\alpha^2 z^2.\varphi^\bullet}{m\tan\alpha^2 z^3}z^\bullet$$

Nous retrouvons

$$\boxed{2z^\bullet.\varphi^\bullet + z.\varphi^{\bullet\bullet} = 0}$$

Et

$$z^{\bullet\bullet} = \frac{p_z^\bullet}{m(\tan\alpha^2+1)} = \frac{1}{m(\tan\alpha^2+1)}\left(\frac{(m\tan\alpha^2 z^2.\varphi^\bullet)^2}{m\tan\alpha^2 z^3} - mg\right)$$

D'où

$$m(\tan\alpha^2+1)z^{\bullet\bullet} = m\tan\alpha^2 z.\varphi^{\bullet 2} - mg$$

Et nous retrouvons

$$\boxed{(\tan\alpha^2+1).z^{\bullet\bullet} - \tan\alpha^2 z.\varphi^{\bullet 2} + g = 0}$$