FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

MODULE : MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

EXERCICE 01: (10 *points*)

1. ***Ecrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du système.***

Point matériel dans l'espace : 03 degrés de liberté.

Contraintes : 02 contraintes (le point est astreint à se suivant une courbe dans le plan).

03 degrés de liberté – 02 contraintes $\Rightarrow$ $\boxed{\text{un (01) degré de liberté}}$.

Coordonnée généralisée : ρ (coordonnées cylindriques).

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{et} \qquad U = mgh = mg.z \qquad \text{avec} \qquad z = \rho^2/2R$$

La vitesse en coordonnées cylindriques

$$\vec{v} = \rho^\bullet \vec{e}_\rho + \rho\varphi^\bullet \vec{e}_\varphi + z^\bullet \vec{e}_z = \rho^\bullet \vec{e}_r + \rho\omega.\vec{e}_\varphi + (\rho.\rho^\bullet/R)\vec{e}_z$$

Donc

$$v^2 = \rho^{\bullet 2} + \rho^2.\omega^2 + \frac{1}{R^2}\rho^2\rho^{\bullet 2}$$

Et

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\rho^{\bullet 2} + \frac{1}{2}m\rho^2.\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{R^2}\rho^2\rho^{\bullet 2} - \frac{mg}{2R}\rho^2}$$

2. ***Equation d'Euler-Lagrange du système.***

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho^\bullet}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(m\rho^\bullet + \frac{m}{R^2}\rho^2\rho^\bullet\right) - \left(m\rho.\omega^2 + \frac{m}{R^2}\rho\rho^{\bullet 2} - \frac{mg}{R}\rho\right) = 0$$

En dérivant

$$m\rho^{\bullet\bullet} + \frac{m}{R^2}\rho^2\rho^{\bullet\bullet} + 2\frac{m}{R^2}\rho.\rho^{\bullet 2} - m\rho.\omega^2 - \frac{m}{R^2}\rho\rho^{\bullet 2} + \frac{mg}{R}\rho = 0$$

Et donc

$$\boxed{(R^2 + \rho^2)\rho^{\bullet\bullet} + \rho.\rho^{\bullet 2} - R(R.\omega^2 - g)\rho = 0}$$

3. ***Position(s) d'équilibre $\boldsymbol{\rho_{\text{équ}}}$ de la perle.***

$$\rho = \rho_{\text{équ}} \qquad \Rightarrow \qquad \rho^\bullet_{\text{équ}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \rho^{\bullet\bullet}_{\text{équ}} = 0$$

En remplaçant dans l'équation du mouvement

$$-R(R.\omega^2 + g)\rho_{\text{équ}} = 0$$

Donc il y a une seule position d'équilibre possible $\boxed{\rho_{\text{équ}} = 0}$

4. ***Hamiltonien.***

$$p_\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho^\bullet} = m\rho^\bullet + \frac{m}{R^2}\rho^2\rho^\bullet \qquad \Rightarrow \qquad \rho^\bullet = \frac{R^2}{m}\frac{p_\rho}{R^2 + \rho^2}$$

$$\mathcal{H}(\rho, p_\rho, , t) = p_\rho\rho^\bullet - \mathcal{L}$$

En remplaçant

$$\mathcal{H}(\rho,p_\rho,,t)=\frac{R^2}{m}\frac{p_\rho^2}{R^2+\rho^2}-\left(\frac{1}{2}\frac{R^4}{m}\frac{p_\rho^2}{(R^2+\rho^2)^2}+\frac{1}{2}m\rho^2.\omega^2+\frac{1}{2}\frac{R^2}{m}\rho^2\frac{p_\rho^2}{(R^2+\rho^2)^2}-\frac{mg}{2R}\rho^2\right)$$

Donc

$$\mathcal{H}(\rho,p_\rho,,t)=\frac{R^2}{m}\frac{p_\rho^2}{R^2+\rho^2}-\frac{1}{2}\frac{R^4}{m}\frac{p_\rho^2}{(R^2+\rho^2)^2}-\frac{1}{2}m\rho^2.\omega^2-\frac{1}{2}\frac{R^2}{m}\rho^2\frac{p_\rho^2}{(R^2+\rho^2)^2}+\frac{mg}{2R}\rho^2$$

Et

$$\boxed{\mathcal{H}(\rho,p_\rho,,t)=\frac{1}{2}\frac{R^2}{m}\frac{p_\rho^2}{R^2+\rho^2}-\frac{1}{2}m\left(\omega^2+\frac{g}{R}\right)\rho^2}$$

5. ***Les équations de Hamilton.***

$$\begin{cases}\rho^\bullet=\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\rho}=\dfrac{R^2}{m}\dfrac{p_\rho}{R^2+\rho^2}\\ p_\rho^\bullet=-\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\rho}=\dfrac{R^2}{m}\dfrac{p_\rho^2}{(R^2+\rho^2)^2}\rho+m\left(\omega^2+\dfrac{g}{R}\right)\rho\end{cases}$$

En dérivant la première équation par rapport au temps

$$\rho^{\bullet\bullet}=\frac{R^2}{m}\frac{p_\rho^\bullet}{R^2+\rho^2}-2\frac{R^2}{m}\frac{p_\rho}{(R^2+\rho^2)^2}\rho\rho^\bullet$$

En remplaçant p_ρ

$$\rho^{\bullet\bullet}=\frac{R^2}{m}\frac{p_\rho^\bullet}{R^2+\rho^2}-2\frac{\rho}{R^2+\rho^2}\rho^{\bullet2}\qquad\text{avec}\quad p_\rho^\bullet=\frac{m}{R^2}\rho^{\bullet2}\rho+m\left(\omega^2+\frac{g}{R}\right)\rho$$

Donc

$$\rho^{\bullet\bullet}=\frac{\rho}{R^2+\rho^2}\rho^{\bullet2}+\frac{R^2}{R^2+\rho^2}\left(\omega^2+\frac{g}{R}\right)\rho-2\frac{\rho}{R^2+\rho^2}\rho^{\bullet2}$$

Et finalement

$$\boxed{(R^2+\rho^2)\rho^{\bullet\bullet}=-\rho.\rho^{\bullet2}+R(R.\omega^2-g)\rho}$$

6. ***Conservation du Hamiltonien.***

Puisque $\varphi^\bullet=\omega=\text{constante}$, dans ce cas le Hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps et alors il est une intégrale première du mouvement.

7. ***Energie mécanique.***

Le Hamiltonien n'est pas égal à l'énergie mécanique totale car la position de la perle dépend explicitement du temps.

$$\vec{r}=\rho.\vec{e}_\rho+z.\vec{e}_z=\rho.\cos\varphi.\vec{e}_x+\rho.\sin\varphi.\vec{e}_y+z.\vec{e}_z\qquad\text{avec}\quad\varphi=\omega.t+\varphi_0$$

8. *Méthode des multiplicateurs de Lagrange.*

Contrainte $z = \rho^2/2R$ ou $z - \rho^2/2R = 0$.

Donc le Lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L}(\rho, \rho^\bullet, z) = \frac{1}{2}m\rho^{\bullet 2} + \frac{1}{2}m\rho^2.\omega^2 + \frac{1}{2}mz^{\bullet 2} - mg.z - \mu.\left(z - \frac{\rho^2}{2R}\right)$$

Les équations de Lagrange

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho^\bullet}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^\bullet}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(m\rho^\bullet) - \left(m\rho.\omega^2 + \dfrac{\mu}{R}\rho\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}(mz^\bullet) - (-mg - \mu) \end{cases}$$

En rajoutant la contrainte, nous obtenons un système de trois équations

$$\begin{cases} m\rho^{\bullet\bullet} - m\rho.\omega^2 - \dfrac{\mu}{R}\rho = 0 \\ mz^{\bullet\bullet} + mg + \mu = 0 \\ \rho^2 = 2R.z \end{cases}$$

En dérivant la dernière équation deux fois

$$(2\rho\rho^\bullet)^\bullet = 2\rho^{\bullet 2} + 2\rho\rho^{\bullet\bullet} = 2R.z^{\bullet\bullet}$$

Nous réduisons donc à deux équations

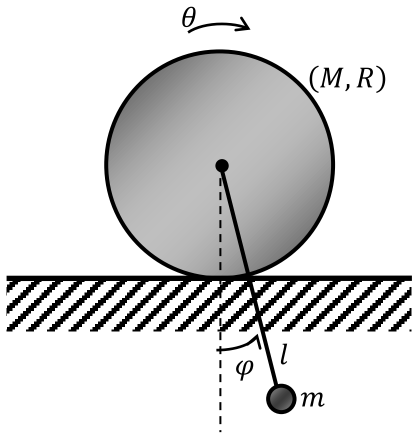
$$\begin{cases} \mu.\rho = mR(\rho^{\bullet\bullet} - \rho.\omega^2) \\ R.\mu = -m\left(\rho^{\bullet 2} + \rho\rho^{\bullet\bullet} + Rg\right) \end{cases}$$

En éliminant μ nous retrouvons l'équation du mouvement

$$R^2(\rho^{\bullet\bullet} - \rho.\omega^2) + \rho\left(\rho^{\bullet 2} + \rho\rho^{\bullet\bullet} + Rg\right) = 0$$

Et la force appliquée par le fil sur la perle est donnée par le multiplicateur de Lagrange

$$\boxed{\mu = -\frac{m}{R}\left(\rho^{\bullet 2} + \rho\rho^{\bullet\bullet} + Rg\right) = mR\left(\frac{\rho^{\bullet\bullet}}{\rho} - \omega^2\right)}$$



EXERCICE 02: (10 *points*)

1. ***Ecrire la vitesse $\vec{v}_m$ de la masse m.***

$$\begin{cases} x_m = R\theta + l.\sin\varphi \\ y_m = -l.\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_m^\bullet = R\theta^\bullet + l\varphi^\bullet.\cos\varphi \\ y_m^\bullet = +l\varphi^\bullet.\sin\varphi \end{cases}$$

Donc

$$\boxed{\vec{v}_m = (R\theta^\bullet + l\varphi^\bullet.\cos\varphi)\vec{e}_x + (l\varphi^\bullet.\sin\varphi)\vec{e}_y}$$

Et son module

$$v_m = \sqrt{(R\theta^\bullet + l\varphi^\bullet.\cos\varphi)^2 + (l\varphi^\bullet.\sin\varphi)^2}$$

D'où

$$v_m = \sqrt{R^2\theta^{\bullet 2} + l^2\varphi^{\bullet 2} + 2lR.\theta^\bullet\varphi^\bullet\cos\varphi}$$

En faisant l'approximation $\cos\varphi \approx 1$ dans le cas des petites oscillations.

$$\boxed{v_m \approx \sqrt{R^2\theta^{\bullet 2} + l^2\varphi^{\bullet 2} + 2lR.\theta^\bullet\varphi^\bullet} = R\theta^\bullet + l\varphi^\bullet}$$

2. ***Ecrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du système.***

$$T = \frac{1}{2}m.v_m^2 + \frac{1}{2}M.v_M^2 + \frac{1}{2}MR^2.\theta^{\bullet 2} \qquad \text{et} \qquad U = mgh$$

Avec $v_M = R\theta^\bullet$ et $h = y_m = -l.\cos\varphi$. En remplaçant

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m.(R\theta^\bullet + l\varphi^\bullet)^2 + \frac{1}{2}M.R^2\theta^{\bullet 2} + \frac{1}{2}MR^2\theta^{\bullet 2} + mgl.\cos\varphi$$

Ou

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}m.(R\theta^\bullet + l\varphi^\bullet)^2 + MR^2\theta^{\bullet 2} + mgl.\cos\varphi}$$

3. ***Ecrire les équations de Lagrange du système.***

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^\bullet}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta^\bullet}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\big(ml.(R\theta^\bullet + l\varphi^\bullet)\big) - (-mgl.\sin\varphi) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}(mR.(R\theta^\bullet + l\varphi^\bullet) + MR^2\theta^\bullet) - 0 = 0 \end{cases}$$

Et

$$\boxed{\begin{cases} R\theta^{\bullet\bullet} + l\varphi^{\bullet\bullet} + g.\sin\varphi = 0 \\ (m+M)R\theta^{\bullet\bullet} + ml\varphi^{\bullet\bullet} = 0 \end{cases}}$$

4. ***Pulsation propre des oscillations de petites amplitudes.***

En reprenant les équations du mouvement

$$\begin{cases} R\theta^{\bullet\bullet} + l\varphi^{\bullet\bullet} + g.\sin\varphi = 0 \\ (m+M)R\theta^{\bullet\bullet} + ml\varphi^{\bullet\bullet} = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation donne

$$\theta^{\bullet\bullet} = -\frac{ml}{(m+M)R}\varphi^{\bullet\bullet} \qquad \dots\dots\dots\dots (1)$$

En remplaçant dans la première équation

$$\frac{Ml}{(m+M)}\varphi^{\bullet\bullet} + g.\sin\varphi = 0$$

Dans le cas des oscillations de petites amplitudes $(\sin\varphi \approx \varphi)$ on trouve

$$\frac{Ml}{(m+M)}\varphi^{\bullet\bullet} + g.\varphi = 0 \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\varphi^{\bullet\bullet} = -\frac{g}{l}\frac{M+m}{M}\varphi = -\omega_0^2.\varphi} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2)$$

D'où la pulsation propre des oscillations

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}\frac{M+m}{M}}}$$

Pour $M = m$: $\boxed{\omega_0 = \sqrt{2g/l}}$

Pour $M \gg m$: $\boxed{\omega_0 = \sqrt{g/l}}$

5. ***Les équations horaires du mouvement.***

La solution de l'équation différentielle (2) est de la forme

$$\varphi(t) = A.\sin(\omega_0 t + \phi)$$

En appliquant la condition initiale $\varphi^{\bullet}(t=0) = 0$ on a

$$\varphi^{\bullet}(0) = A\omega_0.\cos(\phi) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \phi = \pi/2$$

En appliquant la condition initiale $\varphi(t=0) = \varphi_0$ on a

$$\varphi(0) = \varphi_0 = A.\sin(\pi/2) \qquad \Rightarrow \qquad A = \varphi_0$$

D'où, l'équation horaire

$$\boxed{\varphi(t) = \varphi_0.\sin(\omega_0 t + \pi/2) = \varphi_0.\cos(\omega_0 t)}$$

En intégrant l'équation (1) on trouve

$$\theta^{\bullet} - \theta_0^{\bullet} = -\frac{ml}{(m+M)R}(\varphi^{\bullet} - \varphi_0^{\bullet})$$

Or $\theta_0^{\bullet} = 0$ et $\varphi_0^{\bullet} = 0$ (les vitesses initiales des deux masses sont nulles). Donc

$$\theta^{\bullet} = -\frac{ml}{(m+M)R}\varphi^{\bullet}$$

En intégrant à nouveau

$$\theta - \theta_0 = -\frac{ml}{(m+M)R}(\varphi - \varphi_0)$$

Avec $\theta_0 = 0$

$$\boxed{\theta(t) = -\frac{ml}{(m+M)R}(\varphi_0.\cos(\omega_0 t) - \varphi_0)}$$

6. ***Trouver une variable cyclique du mouvement.***

θ est un variable cyclique, car elle n'apparait pas dans l'expression du Lagrangien alors que sa dérivée $\theta^{\bullet}$ y apparait.

En déduire une intégrale première du mouvement.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^{\bullet}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^{\bullet}}\right) = 0$$

Donc, l'intégrale première du mouvement est

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^\bullet} = mR.(R\theta^\bullet + l\varphi^\bullet) + MR^2\theta^\bullet = mRl\varphi^\bullet + (M+m)R^2\theta^\bullet = \text{Constante}}$$

Elle représente le moment cinétique total du système dans l'approximation des petits angles.

7. *Hamiltonien*

$$\begin{cases} p_\varphi = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\bullet} = ml.(R\theta^\bullet + l\varphi^\bullet) \\ p_\theta = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^\bullet} = mR.(R\theta^\bullet + l\varphi^\bullet) + MR^2\theta^\bullet \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_\varphi = mlR.\theta^\bullet + ml^2\varphi^\bullet \\ p_\theta = (m+M)R^2\theta^\bullet + mlR.\varphi^\bullet \end{cases}$$

En inversant le système d'équation précédent

$$\boxed{\begin{cases} \varphi^\bullet = \dfrac{(m+M)}{mMl^2}p_\varphi - \dfrac{1}{MlR}p_\theta \\ \theta^\bullet = -\dfrac{1}{MlR}p_\varphi + \dfrac{1}{MR^2}p_\theta \end{cases}}$$

Les positions et l'énergie potentielle ne dépendent pas explicitement du temps, donc le Hamiltonien est égal à l'énergie mécanique totale

$$\mathcal{H} = T + U = \frac{1}{2}m.(R\theta^\bullet + l\varphi^\bullet)^2 + MR^2\theta^{\bullet 2} - mgl.\cos\varphi$$

En remplaçant $\varphi^\bullet$ et $\theta^\bullet$.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}m.\left(-\frac{1}{Ml}p_\varphi + \frac{1}{MR}p_\theta + \frac{(m+M)}{mMl}p_\varphi - \frac{1}{MR}p_\theta\right)^2 + MR^2\left(-\frac{1}{MlR}p_\varphi + \frac{1}{MR^2}p_\theta\right)^2 - mgl.\cos\varphi$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{H}(\varphi,\theta,p_\varphi,p_\theta) = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} + \frac{1}{M}\left(-\frac{1}{l}p_\varphi + \frac{1}{R}p_\theta\right)^2 - mgl.\cos\varphi}$$