FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

MODULE : MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

EXERCICE 01: (12 points)

1. Contrainte.

$$\boxed{x + r = A = \text{constante}}$$

Vitesses :

$$\vec{v}_1 = r^\bullet.\vec{e}_r + r\theta^\bullet.\vec{e}_\theta \quad ; \quad \vec{v}_2 = x^\bullet.\vec{e}_x = -r^\bullet.\vec{e}_x$$

Hauteurs :

$$h_1 = -r.\cos\theta \quad ; \quad h_2 = -x = r$$

2. Lagrangien.

$$\mathcal{L} = T - U$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}m_2.v_2^2 = \frac{1}{2}m_1.\left(r^{\bullet 2} + r^2\theta^{\bullet 2}\right) + \frac{1}{2}m_2.r^{\bullet 2}$$

Energie potentielle

$$U = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 = (m_2 - m_1.\cos\theta)gr$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1.\left(r^{\bullet 2} + r^2\theta^{\bullet 2}\right) + \frac{1}{2}m_2.r^{\bullet 2} - (m_2 - m_1.\cos\theta)gr}$$

3. Equations de Lagrange.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial r^\bullet}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial \theta^\bullet}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left((m_1 + m_2)r^\bullet\right) - (-(m_2 - m_1.\cos\theta)g) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}(m_1 r^2\theta^\bullet) - (-m_1 gr.\sin\theta) = 0 \end{cases}$$

D'où les équations du mouvement (système d'équations différentielles) suivantes :

$$\boxed{\begin{cases} (m_1 + m_2)r^{\bullet\bullet} + (m_2 - m_1.\cos\theta)g = 0 \\ 2\theta^\bullet + r\theta^{\bullet\bullet} + g.\sin\theta = 0 \end{cases}}$$

4. Impulsion généralisées.

$$\boxed{p_r = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r^\bullet} = (m_1 + m_2)r^\bullet} \quad ; \quad \boxed{p_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta^\bullet} = m_1 r^2\theta^\bullet}$$

p_r : est la quantité de mouvement totale du système dans la direction de r.
p_θ : est le moment cinétique de la masse m_1 par rapport à l'axe de la poulie.

5. Hamiltonien.

$$\boxed{\mathcal{H} = (p_r r^\bullet + p_\theta\theta^\bullet) - \mathcal{L}}$$

Avec

$$r^\bullet = \frac{p_r}{m_1 + m_2} \quad ; \quad \theta^\bullet = \frac{p_\theta}{m_1 r^2}$$

D'où

$$\mathcal{H} = \left(\frac{p_r^2}{m_1+m_2} + \frac{p_\theta^2}{m_1 r^2}\right) - \left(\frac{1}{2}(m_1+m_2)\frac{p_r^2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{1}{2}m_1 r^2 \frac{p_\theta^2}{(m_1 r^2)^2} - (m_2 - m_1.\cos\theta)gr\right)$$

Et

$$\boxed{\mathcal{H}(r,\theta,p_r,p_\theta) = \frac{1}{2}\frac{p_r^2}{m_1+m_2} + \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{m_1 r^2} + (m_2 - m_1.\cos\theta)gr}$$

6. Equations de Hamilton.

$$\boxed{\begin{cases} r^\bullet = \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_r} = \dfrac{p_r}{m_1+m_2} \\ p_r^\bullet = -\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial r} = -(m_2 - m_1.\cos\theta)g \end{cases}} \quad ; \quad \boxed{\begin{cases} \theta^\bullet = \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \dfrac{p_\theta}{m_1 r^2} \\ p_\theta^\bullet = -\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta} = -m_1 gr.\sin\theta \end{cases}}$$

En dérivant la première équation de chaque ensemble, puis en remplaçant par la deuxième équation

$$r^{\bullet\bullet} = \frac{p_r^\bullet}{m_1+m_2} = \frac{-(m_2 - m_1.\cos\theta)g}{m_1+m_2}$$
$$\theta^{\bullet\bullet} = \frac{p_\theta^\bullet}{m_1 r^2} - 2\frac{p_\theta}{m_1 r^3} = -\frac{m_1 gr.\sin\theta}{m_1 r^2} - 2\frac{m_1 r^2\theta^\bullet}{m_1 r^3}$$

Ce qui redonne les équations du mouvement

$$\begin{cases} (m_1+m_2)r^{\bullet\bullet} + (m_2 - m_1.\cos\theta)g = 0 \\ 2\theta^\bullet + r\theta^{\bullet\bullet} + g.\sin\theta = 0 \end{cases}$$

7. **Le Hamiltonien est égal à l'énergie mécanique totale**, car les contraintes ne dépendent pas explicitement du temps, aussi les positions et les énergies potentielles ne dépendent pas explicitement du temps.

8. En reprenant les équation de Lagrange pour $g = 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left((m_1+m_2)r^\bullet\right) = \dfrac{dp_r}{dt} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}(m_1 r^2\theta^\bullet) = \dfrac{dp_\theta}{dt} = 0 \end{cases} \quad ; \quad \boxed{\begin{cases} p_r = \text{constante} \\ p_\theta = \text{constante} \end{cases}}$$

Il y a conservation de la quantité de mouvement total et du moment cinétique total.

9. En intégrant la première équation et en utilisant les conditions initiales.

$$(m_1+m_2)r^\bullet = (m_1+m_2)v_0 = \text{constante} \qquad \Rightarrow \quad \boxed{r = v_0 t + r_0}$$

En remplaçant dans la deuxième équation et en utilisant les conditions initiales.

$$m_1 r^2\theta^\bullet = m_1 r_0^2\omega_0 = \text{constante}$$

Donc

$$\theta^\bullet = \frac{r_0^2\omega_0}{(v_0 t + r_0)^2}$$

En intégrant

$$\theta = -\frac{r_0^2\omega_0}{v_0}\frac{1}{(v_0 t + r_0)} + K$$

En utilisant les conditions initiales

$$K = \theta_0 + \frac{r_0\omega_0}{v_0} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\theta = \frac{r_0\omega_0}{v_0}\frac{v_0 t}{(v_0 t + r_0)} + \theta_0}$$

EXERCICE 02: (08 points)

$$\mathcal{H}(q,p,t) = kq^2p^2$$

1. **Dimension de la constante k.**

$$[q] = L \quad ; \quad [p] = M\frac{L}{T} \quad ; \quad [\mathcal{H}] = \text{Energie} = M\frac{L^2}{T^2}$$

Donc

$$\boxed{[k] = \frac{1}{M.L^2}}$$

2. **Equations de Hamilton.**

$$\boxed{\begin{cases} q^\bullet = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = 2kq^2p \\ p^\bullet = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -2kqp^2 \end{cases}}$$

A partir de la première équation

$$\boxed{p = \frac{q^\bullet}{2kq^2}}$$

3. **Expression du Lagrangien.**

$$\mathcal{H} = pq^\bullet - \mathcal{L}$$

Donc

$$\mathcal{L} = pq^\bullet - \mathcal{H} = \frac{q^\bullet}{2kq^2}q^\bullet - kq^2\left(\frac{q^\bullet}{2kq^2}\right)^2$$

Ce qui donne

$$\boxed{\mathcal{L}(q,q^\bullet) = \frac{{q^\bullet}^2}{2kq^2}}$$

4. **Le Hamiltonien est conservé,** car il ne dépend pas explicitement du temps.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} = \text{constante}$$

5. **Equation du mouvement de la fonction q.**

$$q^\bullet = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = 2kq^2p \qquad \text{avec} \qquad p = \sqrt{\frac{\mathcal{H}}{kq^2}} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{H} = \text{constante}$$

Donc

$$\boxed{q^\bullet = 2\sqrt{k\mathcal{H}}.q = A.q}$$

6. Résolution de l'équation du mouvement.

$$\mathcal{H} = kq^2p^2 = \text{constante}$$

A $t = 0$:

$$\boxed{\mathcal{H} = kq_0^2p_0^2}$$

Et la constante A

$$A = 2\sqrt{k\mathcal{H}} = 2kq_0p_0$$

En intégrant l'équation trouvée en 5.

$$q^{\bullet} = A.q \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{q} = A.dt$$

Donc

$$\ln q = A.t + C$$

Et

$$q = K.\exp(A.t)$$

En utilisant les conditions initiales $q(t = 0) = q_0$ nous trouvons $K = q_0$. Ce qui donne finalement

$$\boxed{q(t) = q_0.\exp(2kq_0p_0.t)}$$