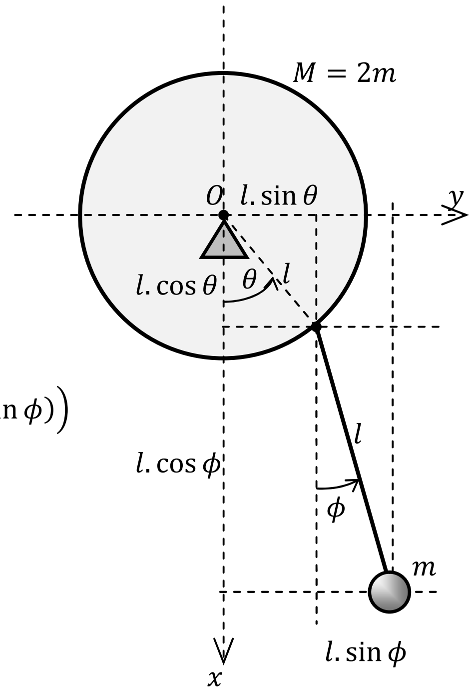
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

MODULE : MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

EXERCICE 01 : (12 *points*)



1. Positions de la masse ponctuelle.

$$\begin{cases} x_m = l.\cos\theta + l.\cos\phi \\ y_m = l.\sin\theta + l.\sin\phi \end{cases}$$

Vitesse de la masse ponctuelle

$$\begin{cases} x_m^\bullet = -l.(\theta^\bullet.\sin\theta + \phi^\bullet.\sin\phi) \\ y_m^\bullet = l.(\theta^\bullet.\cos\theta + \phi^\bullet.\cos\phi) \end{cases}$$

Et le carré du module de la vitesse

$$v_m^2 = {x_m^\bullet}^2 + {y_m^\bullet}^2 = l^2\left(\theta^{\bullet 2} + \phi^{\bullet 2} + 2\theta^\bullet\phi^\bullet(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi)\right)$$

Ou

$$v_m^2 = {x_m^\bullet}^2 + {y_m^\bullet}^2 = l^2\left(\theta^{\bullet 2} + \phi^{\bullet 2} + 2\theta^\bullet\phi^\bullet\cos(\theta - \phi)\right)$$

On fait l'approximation $\cos(\theta - \phi) \approx 1$, donc

$$v_m^2 \approx l^2\left(\theta^{\bullet 2} + \phi^{\bullet 2} + 2\theta^\bullet\phi^\bullet\right) = l^2(\theta^\bullet + \phi^\bullet)^2$$

2. Lagrangien.

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{1}{2}MR^2.\theta^{\bullet 2} + \frac{1}{2}ml^2(\theta^\bullet + \phi^\bullet)^2 = ml^2.\theta^{\bullet 2} + \frac{1}{2}ml^2(\theta^\bullet + \phi^\bullet)^2$$

Energie potentielle

$$U = mg.h_m = -mg.x_m$$

Donc

$$U = -mgl.(\cos\theta + \cos\phi)$$

Et le Lagrangien

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = ml^2.\theta^{\bullet 2} + \frac{1}{2}ml^2(\theta^\bullet + \phi^\bullet)^2 + mgl.(\cos\theta + \cos\phi)}$$

3. Equations de Lagrange.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta^\bullet}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\bullet}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(2ml^2.\theta^\bullet + ml^2(\theta^\bullet + \phi^\bullet)\right) - (-mgl.\sin\theta) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(ml^2(\theta^\bullet + \phi^\bullet)\right) - (-mgl.\sin\phi) = 0 \end{cases}$$

Pour les petites oscillations $\sin\theta \approx \theta$ et $\sin\phi \approx \phi$

D'où le système d'équations différentielles

$$\boxed{\begin{cases} 3.\theta^{\bullet\bullet} + \phi^{\bullet\bullet} + \omega_0^2.\theta = 0 \\ \theta^{\bullet\bullet} + \phi^{\bullet\bullet} + \omega_0^2.\phi = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}}$$

4. **Pulsations propres :** En posant les solutions particulières de ces équations sous la forme :

$$\theta(t) = A_1.\sin(\omega.t + \varphi) \quad ; \quad \phi(t) = A_2.\sin(\omega.t + \varphi)$$

Et en remplaçant dans les équations différentielles précédentes, nous trouvons

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - 3\omega^2).A_1 - \omega^2.A_2 = 0 \\ -\omega^2.A_1 + (\omega_0^2 - \omega^2).A_2 = 0 \end{cases}$$

Ce qui nous ramène à un système linéaire d'équation sans second membre qui n'admet de solutions non nulles que dans le cas où le déterminant est égal à zéro.

$$\begin{vmatrix} \omega_0^2 - 3\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = (\omega_0^2 - 3\omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2) - \omega^4 = 0$$

Ce qui donne l'équation du deuxième ordre dont l'inconnue est ω^2.

$$2\omega^4 - 4\omega_0^2.\omega^2 + \omega_0^4 = 0$$

Le discriminant est égal à

$$\Delta = \sqrt{16\omega_0^4 - 8\omega_0^4} = 2\sqrt{2}\omega_0^2$$

Les solutions

$$\omega_\pm^2 = \frac{4\omega_0^2 \pm 2\sqrt{2}\omega_0^2}{4}$$

Et les pulsations propres (fondamentale et harmonique).

$$\boxed{\omega_f = \left(\sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\sqrt{\frac{g}{l}}} \quad ; \quad \boxed{\omega_h = \left(\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

5. **Moments conjugués.**

$$\boxed{p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^\bullet} = ml^2(3\theta^\bullet + \phi^\bullet)} \quad ; \quad \boxed{p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\bullet} = ml^2(\theta^\bullet + \phi^\bullet)}$$

6. **Vitesses généralisées.**

$$3\theta^\bullet + \phi^\bullet = \frac{p_\theta}{ml^2} \quad \dots\dots (1) \qquad \text{et} \qquad \theta^\bullet + \phi^\bullet = \frac{p_\phi}{ml^2} \quad \dots\dots (2)$$

En faisant $(1) - (2)$ puis $3.(2) - (1)$ on trouve :

$$\boxed{\theta^\bullet = \frac{1}{2ml^2}\left(p_\theta - p_\phi\right)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\phi^\bullet = \frac{1}{2ml^2}\left(3p_\phi - p_\theta\right)}$$

7. Hamiltonien.

$$\mathcal{H}(\theta,\phi,p_\theta,p_\phi,t)=(p_\theta.\theta^\bullet+p_\phi.\phi^\bullet)-\mathcal{L}$$

D'où

$$\mathcal{H}=(p_\theta.\theta^\bullet+p_\phi.\phi^\bullet)-\left(ml^2.\theta^{\bullet 2}+\frac{1}{2}ml^2(\theta^\bullet+\phi^\bullet)^2+mgl.(\cos\theta+\cos\phi)\right)$$

En remplaçant $\theta^\bullet$ et $\phi^\bullet$.

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2ml^2}(p_\theta^2-2p_\theta p_\phi+3p_\phi^2)-\left(ml^2.\frac{(p_\theta-p_\phi)^2}{(2ml^2)^2}+\frac{1}{2}ml^2\frac{(2p_\phi)^2}{(2ml^2)^2}+mgl.(\cos\theta+\cos\phi)\right)$$

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2ml^2}(p_\theta^2-2p_\theta p_\phi+3p_\phi^2)-\left(\frac{1}{4ml^2}(p_\theta^2-2p_\theta p_\phi+3p_\phi^2)+mgl.(\cos\theta+\cos\phi)\right)$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{H}(\theta,\phi,p_\theta,p_\phi,t)=\frac{1}{4ml^2}(p_\theta^2-2p_\theta p_\phi+3p_\phi^2)-mgl.(\cos\theta+\cos\phi)}$$

8. Le Hamiltonien est égal à l'énergie mécanique totale.

$$\boxed{\mathcal{H}=T+U=E}$$

Car l'énergie potentielle U ainsi que les positions des deux corps ne dépendent pas explicitement du temps.

9. Equations de Hamilton.

$$\begin{cases}\theta^\bullet=\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\theta}\\ p_\theta^\bullet=-\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\begin{cases}\theta^\bullet=\dfrac{1}{2ml^2}\,(p_\theta-p_\phi)\\ p_\theta^\bullet=-mgl.\sin\theta\end{cases}}$$

Et

$$\begin{cases}\phi^\bullet=\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\phi}\\ p_\phi^\bullet=-\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\begin{cases}\phi^\bullet=\dfrac{1}{2ml^2}\,(3p_\phi-p_\theta)\\ p_\phi^\bullet=-mgl.\sin\phi\end{cases}}$$

En dérivant les moments trouvés en 5.

$$p_\theta^\bullet=ml^2(3\theta^{\bullet\bullet}+\phi^{\bullet\bullet})\qquad;\qquad p_\phi^\bullet=ml^2(\theta^{\bullet\bullet}+\phi^{\bullet\bullet})$$

Puis en remplaçant on trouve

$$\begin{cases}ml^2(3\theta^{\bullet\bullet}+\phi^{\bullet\bullet})=-mgl.\sin\theta\\ ml^2(\theta^{\bullet\bullet}+\phi^{\bullet\bullet})=-mgl.\sin\phi\end{cases}$$

Et dans le cas des petites oscillations $\sin\theta\approx\theta$ et $\sin\phi\approx\phi$, on retrouve

$$\boxed{\begin{cases}3.\theta^{\bullet\bullet}+\phi^{\bullet\bullet}+\omega_0^2.\theta=0\\ \theta^{\bullet\bullet}+\phi^{\bullet\bullet}+\omega_0^2.\phi=0\end{cases}\qquad\text{avec}\quad\omega_0^2=\frac{g}{l}}$$

EXERCICE 02 : (08 *points*)

$$\mathcal{L}(q, q^\bullet) = \frac{1}{2} k \left(\frac{q^\bullet}{q}\right)^2$$

1. Dimension de la constante k.

$$[q] = L \quad ; \quad [q^\bullet] = \frac{L}{T} \quad ; \quad [\mathcal{L}] = \text{Energie} = M\frac{L^2}{T^2}$$

Donc

$$\boxed{[k] = M.L^2}$$

2. Hamiltonien.

Le moment conjugué

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\bullet} = k\frac{q^\bullet}{q^2} \qquad \Rightarrow \qquad q^\bullet = \frac{1}{k} p q^2$$

Et le Hamiltonien

$$\mathcal{H} = pq^\bullet - \mathcal{L} = \frac{1}{k} p^2 q^2 - \frac{1}{2} k \frac{1}{q^2}\left(\frac{1}{k} p q^2\right)^2$$

Ce qui donne

$$\boxed{\mathcal{H}(q, p, t) = \frac{1}{2k} p^2 q^2}$$

3. Le Hamiltonien est conservé, car il ne dépend pas explicitement du temps.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} = \text{constante}$$

4. Equations de Hamilton.

$$\boxed{\begin{cases} q^\bullet = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \dfrac{1}{k} q^2 p \\ p^\bullet = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\dfrac{1}{k} q p^2 \end{cases}}$$

5. Equation du mouvement de la fonction q.

$$q^\bullet = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{1}{k} q^2 p \qquad \text{avec} \qquad p = \frac{\sqrt{2k.\mathcal{H}}}{q} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{H} = \text{constante}$$

Donc

$$\boxed{q^\bullet = \sqrt{\frac{2\mathcal{H}}{k}}.q = A.q}$$

6. Résolution de l'équation du mouvement.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2k} p^2 q^2 = \text{constante}$$

A $t = 0$:

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{1}{2k} q_0^2 p_0^2}$$

Et la constante A

$$A = \sqrt{\frac{2\mathcal{H}}{k}} = \frac{q_0 p_0}{k}$$

En intégrant l'équation trouvée en 5.

$$q^\bullet = A.q \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{q} = A.dt$$

Donc

$$\ln q = A.t + C$$

Et

$$q = K.\exp(A.t)$$

En utilisant les conditions initiales $q(t = 0) = q_0$ nous trouvons $K = q_0$. Ce qui donne finalement

$$\boxed{q(t) = q_0.\exp\left(\frac{q_0 p_0}{k}.t\right)}$$