FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

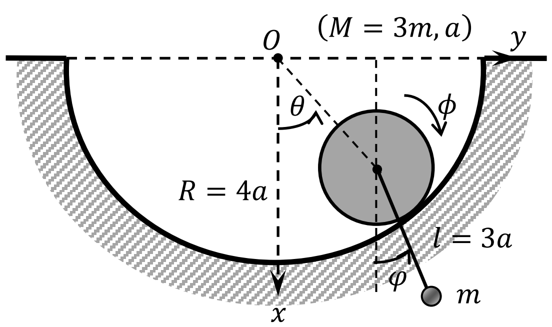
CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

MODULE : MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

DURÉE : 60 minutes.

Nom et Prénom : John Doe	Signature :	Note : /20

Un ***cylindre plein*** de masse $M = 3m$ et de rayon a roule sans glisser, uniquement sous l'effet de son poids, à l'intérieur d'une cavité cylindrique de rayon $R = 4a$ (figure ci-contre).
Nous fixons sur l'axe du cylindre un pendule simple constitué d'une tige rigide de longueur $l = 3a$ et de masse négligeable à son extrémité se trouve une masse ponctuelle m.
La tige n'est pas solidaire au cylindre (elle ne tourne pas avec le même angle) et les frottements avec l'air sont négligeable.



1. Ecrire la condition de roulement sans glissement. Quel est le nombre de degrés de liberté ?

Condition de roulement sans glissement $R\theta = a\phi \Rightarrow \boxed{\phi = 4\theta}$

Nombre de degrés de liberté : $\boxed{d = 2}$

Coordonnées généralisées : $\boxed{(\theta, \varphi)}$

2. Ecrire la vitesse $\vec{v}_m$ de la masse m et son module v_m dans le référentiel fixe (Oxy).

Position de la masse ponctuelle:

$$\begin{cases} x_m = (R-a).\cos\theta + l.\cos\varphi = 3a.(\cos\theta + \cos\varphi) \\ y_m = (R-a).\sin\theta + l.\sin\varphi = 3a.(\sin\theta + \sin\varphi) \end{cases}$$

Vitesse de la masse ponctuelle

$$\begin{cases} x_m^{\bullet} = -3a.(\theta^{\bullet}.\sin\theta + \varphi^{\bullet}.\sin\varphi) \\ y_m^{\bullet} = 3a.(\theta^{\bullet}.\cos\theta + \varphi^{\bullet}.\cos\varphi) \end{cases}$$

Et le carré du module de la vitesse

$$v_m^2 = x_m^{\bullet\,2} + y_m^{\bullet\,2} = 9a^2\left(\theta^{\bullet 2} + \varphi^{\bullet 2} + 2\theta^{\bullet}\varphi^{\bullet}(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi)\right)$$

ou

$$v_m^2 = x_m^{\bullet\,2} + y_m^{\bullet\,2} = 9a^2(\theta^{\bullet 2} + \varphi^{\bullet 2} + 2\theta^{\bullet}\varphi^{\bullet}\cos(\theta - \varphi))$$

On fait l'approximation $\cos(\theta - \phi) \approx 1$

Donc

$$v_m^2 \approx 9a^2(\theta^{\bullet 2} + \varphi^{\bullet 2} + 2\theta^{\bullet}\varphi^{\bullet}) = 9a^2(\theta^{\bullet} + \varphi^{\bullet})^2$$

ou

$$\boxed{v_m = 3a.|\theta^{\bullet} + \varphi^{\bullet}|}$$

Cas des petites oscillations autour de l'équilibre : On prendra $\cos(\theta - \varphi) \approx 1$ dans l'expression de v_m.

3. Ecrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du système.

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_m^2$$

Avec

$V = (R-a)\theta^{\bullet} = 3a\theta^{\bullet}$, $\omega = \phi^{\bullet} = 4\theta^{\bullet}$, $M = 3m$, $I = \frac{1}{2}Ma^2 = \frac{1}{2}3.ma^2$ *et* $v_m^2 = 9a^2(\theta^{\bullet} + \varphi^{\bullet})^2$

D'où

$$T = \frac{1}{2}27.ma^2\theta^{\bullet 2} + \frac{1}{2}24.ma^2\theta^{\bullet 2} + \frac{1}{2}9ma^2(\theta^{\bullet} + \varphi^{\bullet})^2 = \frac{1}{2}51.ma^2\theta^{\bullet 2} + \frac{1}{2}9ma^2(\theta^{\bullet} + \varphi^{\bullet})^2$$

Energie potentielle

$$U = Mg.H + mg.h_m = -mga.(12.\cos\theta + 3.\cos\varphi)$$

Avec $H = -(R-a)\cos\theta = -3a.\cos\theta$, $M = 3m$ *et* $h_m = -x_m = -3a.(\cos\theta + \cos\varphi)$

Et le Lagrangien

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}51.ma^2\theta^{\bullet 2} + \frac{1}{2}9ma^2(\theta^{\bullet} + \varphi^{\bullet})^2 + mga.(12.\cos\theta + 3.\cos\varphi)}$$

4. Ecrire les équations de Lagrange du système et en déduire les équations du mouvement (petits angles).

Les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^{\bullet}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(51.ma^2\theta^{\bullet} + 9ma^2(\theta^{\bullet} + \varphi^{\bullet})\right) - (-12mga.\sin\theta) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^{\bullet}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(9ma^2(\theta^{\bullet} + \varphi^{\bullet})\right) - (-3mga.\sin\varphi) = 0$$

Pour les petites oscillations $\sin\theta \approx \theta$ et $\sin\varphi \approx \varphi$

D'où le système d'équations différentielles

$$\boxed{\begin{cases} 17.\theta^{\bullet\bullet} + 3.\varphi^{\bullet\bullet} + 4\omega_0^2.\theta = 0 \\ 3.\theta^{\bullet\bullet} + 3.\varphi^{\bullet\bullet} + \omega_0^2.\varphi = 0 \end{cases}}$$

Avec $\omega_0^2 = g/a$

Nom et Prénom : *John Doe*	Signature :

5. En posant les solutions particulières de ces équations (dans le cas des petites oscillations) sous la forme :

$$q_1(t) = A_1.\sin(\omega.t+\phi_i) \quad \text{et} \quad q_2(t) = A_2.\sin(\omega.t+\phi_i)$$

Trouver les pulsations propres du système et les nommer.

Solutions particulières

$$\theta(t) = A_1.\sin(\omega.t+\phi_i) \quad ; \quad \varphi(t) = A_2.\sin(\omega.t+\phi_i)$$

En remplaçant dans les équations différentielles précédentes

$$\begin{cases} -17\omega^2.A_1.\sin(\omega.t+\phi_i) - 3\omega^2.A_2.\sin(\omega.t+\phi_i) + 4\omega_0^2.A_1.\sin(\omega.t+\phi_i) = 0 \\ -3\omega^2.A_1.\sin(\omega.t+\phi_i) - 3\omega^2.A_2.\sin(\omega.t+\phi_i) + \omega_0^2.A_2.\sin(\omega.t+\phi_i) = 0 \end{cases}$$

D'où le système d'équations linéaires sans second membre

$$\begin{cases} (4\omega_0^2 - 17\omega^2).A_1 - 3\omega^2.A_2 = 0 \\ -3\omega^2.A_1 + (\omega_0^2 - 3\omega^2).A_2 = 0 \end{cases}$$

Ce système n'admet de solutions non nulles que dans le cas

où le déterminant est égal à zéro

$$\begin{vmatrix} 4\omega_0^2 - 17\omega^2 & -3\omega^2 \\ -3\omega^2 & \omega_0^2 - 3\omega^2 \end{vmatrix} = (4\omega_0^2 - 17\omega^2)(\omega_0^2 - 3\omega^2) - 9\omega^4 = 0$$

Ce qui donne l'équation du deuxième ordre en ω^2

$$42\omega^4 - 29\omega_0^2.\omega^2 + 4\omega_0^4 = 0$$

Le discriminant est égal à

$$\Delta = \sqrt{841\omega_0^4 - 672\omega_0^4} = \sqrt{169.\omega_0^4} = 13.\omega_0^2$$

Et les solutions

$$\omega_\pm^2 = \left(\frac{29 \pm 13}{84}\right)\omega_0^2$$

D'où la pulsation ***fondamentale***

$$\boxed{\omega_f = \sqrt{\frac{4}{21}}\omega_0 = 0{,}436\sqrt{\frac{g}{a}}}$$

*Et l'****harmonique***

$$\boxed{\omega_h = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_0 = 0{,}707\sqrt{\frac{g}{a}}}$$