FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

EXERCICE 01: (13 *points*)

1. ***Ecrire la vitesse $\vec{v}_m$ de la masse m et son module v_m dans le référentiel (OXY).***

Position de la masse m.

$$x_m = X + x.\cos\alpha \quad \text{et} \quad y_m = H_0 - x.\sin\alpha$$

D'où le vecteur vitesse

$$\vec{v}_m = x_m^\bullet.\vec{e}_x + y_m^\bullet.\vec{e}_y \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_m = (X^\bullet + x^\bullet.\cos\alpha).\vec{e}_x + (-x^\bullet.\sin\alpha).\vec{e}_y}$$

Et son module

$$|\vec{v}_m| = \sqrt{(x_m^\bullet)^2 + (y_m^\bullet)^2} = \sqrt{(X^\bullet + x^\bullet.\cos\alpha)^2 + (-x^\bullet.\sin\alpha)^2}$$

et

$$\boxed{|\vec{v}_m| = \sqrt{X^{\bullet 2} + x^{\bullet 2} + 2X^\bullet x^\bullet.\cos\alpha}}$$

2. ***Ecrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du système.***

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$T = \frac{1}{2}m.v_m^2 + \frac{1}{2}M.v_M^2 \quad \text{et} \quad U = mgh_m = mgy_m$$

Avec $v_M = X^\bullet$.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m.\left(X^{\bullet 2} + x^{\bullet 2} + 2X^\bullet x^\bullet.\cos\alpha\right) + \frac{1}{2}M.X^{\bullet 2} - mg(H_0 - x.\sin\alpha)$$

Ou

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}m.x^{\bullet 2} + \frac{1}{2}(M+m).X^{\bullet 2} + m.X^\bullet x^\bullet.\cos\alpha + mg.x.\sin\alpha - mgH_0}$$

3. ***Ecrire les équations de Lagrange du système.***

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\bullet}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\bullet}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial X} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(m.x^\bullet + m.\cos\alpha\,.X^\bullet) - mg.\sin\alpha = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left((M+m).X^\bullet + m.\cos\alpha\,.x^\bullet\right) - 0 = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\boxed{\begin{cases} m.x^{\bullet\bullet} + m.\cos\alpha\,.X^{\bullet\bullet} - mg.\sin\alpha = 0 \\ m.\cos\alpha\,.x^{\bullet\bullet} + (M+m).X^{\bullet\bullet} = 0 \end{cases}}$$

4. ***En déduire les équations du mouvement.***

Les deux équations précédentes sont un système linéaire à deux in connues $x^{\bullet\bullet}$ et $X^{\bullet\bullet}$. Sa résolution donne :

$$X^{\bullet\bullet} = -\frac{m}{M+m}.\cos\alpha\,.x^{\bullet\bullet}$$

D'où

$$m.x^{\bullet\bullet} - \frac{m^2}{M+m}.\cos^2\alpha\,.x^{\bullet\bullet} = mg.\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^{\bullet\bullet} = \frac{M+m}{M+m.\sin^2\alpha}g.\sin\alpha}$$

Et

$$\boxed{X^{\bullet\bullet} = -\frac{m.\cos\alpha}{M+m.\sin^2\alpha}g.\sin\alpha}$$

Quelle est la nature du mouvement du plan incliné et de la masse m.

$$x^{\bullet\bullet} = \text{Constante} \quad \text{et} \quad X^{\bullet\bullet} = \text{Constante}$$

Donc les deux mouvements sont rectilignes uniformément variés.

5. ***Trouver une variable cyclique du mouvement.***

X est un variable cyclique, car elle n'apparait pas dans l'expression du Lagrangien alors que sa dérivée $X^\bullet$ y apparait.

En déduire une intégrale première du mouvement.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\bullet}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\bullet}\right)=0$$

Donc $\boxed{\partial\mathcal{L}/\partial X^\bullet = \text{Constante}}$ est une intégrale première du mouvement.

Que représente cette valeur.

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\bullet}=(M+m).X^\bullet+m.\cos\alpha\,.x^\bullet}$$

Elle représente la composante de la quantité de mouvement totale suivant l'axe (OX).

6. ***Calculer les moments conjugués p_x et p_X en fonction de $x^\bullet$ et $X^\bullet$.***

$$\begin{cases} p_x=\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\bullet} \\ p_X=\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\bullet}\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} p_x=m.x^\bullet+m.\cos\alpha\,.X^\bullet \\ p_X=m.\cos\alpha\,.x^\bullet+(M+m).X^\bullet\end{cases}}$$

7. ***Résoudre le système d'équations pour trouver $x^\bullet$ et $X^\bullet$ en fonction de p_x et p_X.***

$$\begin{cases} \cos\alpha\,.p_x=m.\cos\alpha\,.x^\bullet+m.\cos^2\alpha\,.X^\bullet \\ p_X=m.\cos\alpha\,.x^\bullet+(M+m).X^\bullet\end{cases}$$

En faisant la différence

$$\boxed{X^\bullet=\frac{p_X-\cos\alpha\,.p_x}{(M+m)-m.\cos^2\alpha}}$$

D'autre part

$$\begin{cases} (M+m).p_x=m.(M+m).x^\bullet+m.\cos\alpha\,.(M+m).X^\bullet \\ m.\cos\alpha\,.p_X=m^2.\cos^2\alpha\,.x^\bullet+m.\cos\alpha\,.(M+m).X^\bullet\end{cases}$$

En faisant la différence

$$\boxed{x^\bullet=\frac{(M+m).p_x-m.\cos\alpha\,.p_X}{m.\big((M+m)-m.\cos^2\alpha\big)}}$$

8. ***Calculer le Hamiltonien $\mathcal{H}$ du système.***

$$\mathcal{H}(x,X,p_x,p_X,t)=(p_x.x^\bullet+p_X.X^\bullet)-\mathcal{L}$$

D'où

$$\mathcal{H}=(p_x.x^\bullet+p_X.X^\bullet)-\left(\frac{1}{2}m.x^{\bullet 2}+\frac{1}{2}(M+m).X^{\bullet 2}+m.X^\bullet x^\bullet.\cos\alpha+mg.x.\sin\alpha-mgH_0\right)$$

En remplaçant p_x et p_X.

$$\mathcal{H}=\left(m.x^{\bullet 2}+m.\cos\alpha\,.X^\bullet.x^\bullet+(M+m).X^{\bullet 2}+m.\cos\alpha\,.x^\bullet.X^\bullet\right)-\frac{1}{2}m.x^{\bullet 2}-\frac{1}{2}(M+m).X^{\bullet 2}$$
$$-m.X^\bullet x^\bullet.\cos\alpha-mg.x.\sin\alpha+mgH_0$$

Donc

$$\mathcal{H}=T+U=\frac{1}{2}m.x^{\bullet 2}+\frac{1}{2}(M+m).X^{\bullet 2}+m.X^\bullet x^\bullet.\cos\alpha-mg.x.\sin\alpha+mgH_0$$

En remplaçant $x^\bullet$ et $X^\bullet$.

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}m\left(\frac{(M+m).p_x-m.\cos\alpha.p_X}{m.\left((M+m)-m.\cos^2\alpha\right)}\right)^2+\frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{p_X-\cos\alpha.p_x}{(M+m)-m.\cos^2\alpha}\right)^2$$
$$+m\left(\frac{p_X-\cos\alpha.p_x}{(M+m)-m.\cos^2\alpha}\right)\left(\frac{(M+m).p_x-m.\cos\alpha.p_X}{m.\left((M+m)-m.\cos^2\alpha\right)}\right)\cos\alpha-mg.x.\sin\alpha$$
$$+mgH_0$$

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}\frac{\left((M+m).p_x-m.\cos\alpha.p_X\right)^2+m.(M+m)(p_X-\cos\alpha.p_x)^2}{m.\left((M+m)-m.\cos^2\alpha\right)^2}$$
$$+\frac{m.\cos\alpha.(p_X-\cos\alpha.p_x)\left((M+m).p_x-m.\cos\alpha.p_X\right)}{m.\left((M+m)-m.\cos^2\alpha\right)^2}-mg.x.\sin\alpha+mgH_0$$

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}\frac{(M+m)^2.p_x^2+m^2.\cos^2\alpha.p_X^2+m.(M+m)(p_X^2+\cos^2\alpha.p_x^2)-4m.\cos\alpha.(M+m)p_X.p_x}{m.\left((M+m)-m.\cos^2\alpha\right)^2}$$
$$+\frac{m.\cos\alpha.\left(\left((M+m)+m.\cos^2\alpha\right).p_X.p_x-\cos\alpha.(M+m).p_x^2-m.\cos\alpha.p_X^2\right)}{m.\left((M+m)-m.\cos^2\alpha\right)^2}$$
$$-mg.x.\sin\alpha+mgH_0$$

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}\frac{(M+m).p_x^2+m.p_X^2}{(M+m)-m.\cos^2\alpha}+\frac{\cos\alpha.\left(-(M+m)+m.\cos^2\alpha\right)p_X.p_x}{\left((M+m)-m.\cos^2\alpha\right)^2}-mg.x.\sin\alpha+mgH_0$$

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}\frac{(M+m).p_x^2+m.p_X^2}{m.\left((M+m)-m.\cos^2\alpha\right)}-\frac{\cos\alpha.p_X.p_x}{(M+m)-m.\cos^2\alpha}-mg.x.\sin\alpha+mgH_0$$

$$\boxed{\mathcal{H}=\frac{1}{2}\frac{(M+m).p_x^2+m.p_X^2-2m.\cos\alpha.p_X.p_x}{m.\left((M+m)-m.\cos^2\alpha\right)}-mg.x.\sin\alpha+mgH_0}$$

9. ***Ecrire les équations de Hamilton du système.***

$$\begin{cases}x^\bullet=\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_x}\\ p_x^\bullet=-\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}\end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x^\bullet=\dfrac{(M+m).p_x-m.\cos\alpha.p_X}{m.\left((M+m)-m.\cos^2\alpha\right)}\\ p_x^\bullet=mg.\sin\alpha\end{cases}}$$

Et

$$\begin{cases}X^\bullet=\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_X}\\ p_X^\bullet=-\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial X}\end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}X^\bullet=\dfrac{p_X-\cos\alpha.p_x}{(M+m)-m.\cos^2\alpha}\\ p_X^\bullet=0\end{cases}}$$

10. ***En déduire les expressions $p_x(t)$ et $p_X(t)$ en fonction du temps.***

$$\begin{cases}p_x^\bullet=mg.\sin\alpha\\ p_X^\bullet=0\end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}p_x=mg.\sin\alpha.t+p_{0x}\\ p_X=p_{0X}=\text{Constante}\end{cases}}$$

Et les expressions de $x^\bullet(t)$ et $X^\bullet(t)$.

$$\begin{cases}x^\bullet=\dfrac{(M+m).p_x-m.\cos\alpha.p_X}{m.\left((M+m)-m.\cos^2\alpha\right)}\\ X^\bullet=\dfrac{p_X-\cos\alpha.p_x}{(M+m)-m.\cos^2\alpha}\end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x^\bullet(t)=\dfrac{(M+m).(mg.\sin\alpha.t+p_{0x})-m.\cos\alpha.p_{0X}}{m.\left((M+m)-m.\cos^2\alpha\right)}\\ X^\bullet(t)=\dfrac{p_{0X}-\cos\alpha.(mg.\sin\alpha.t+p_{0x})}{(M+m)-m.\cos^2\alpha}\end{cases}}$$

EXERCICE 02: (07 *points*)

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2q^2}$$

1. Dire pourquoi $\mathcal{H}$ est une constante du mouvement.

$\mathcal{H}(q,p)$ ne dépend pas explicitement du temps. Comme :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{H} = \text{Constante}$$

2. Calculer les crochets de Poisson $\{q,\mathcal{H}\}$ et $\{p,\mathcal{H}\}$.

$$\{q,\mathcal{H}\} = \frac{\partial q}{\partial q}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} - \frac{\partial q}{\partial p}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \qquad \text{avec} \qquad \frac{\partial q}{\partial p} = 0$$

Donc

$$\boxed{\{q,\mathcal{H}\} = p}$$

$$\{p,\mathcal{H}\} = \frac{\partial p}{\partial q}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} - \frac{\partial p}{\partial p}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \qquad \text{avec} \qquad \frac{\partial p}{\partial q} = 0$$

Donc

$$\boxed{\{p,\mathcal{H}\} = \frac{1}{q^3}}$$

3. Calculer le crochet de Poisson $\{C,\mathcal{H}\}$.

$$C(q,p,t) = \frac{qp}{2} - t.\mathcal{H}(q,p)$$

$$\{C,\mathcal{H}\} = \frac{\partial C}{\partial q}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} - \frac{\partial C}{\partial p}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}$$

$$\frac{\partial C}{\partial q} = \frac{p}{2} - t\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial C}{\partial p} = \frac{q}{2} - t\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}$$

Donc

$$\{C,\mathcal{H}\} = \left(\frac{p}{2} - t\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\right)\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} - \left(\frac{q}{2} - t\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\right)\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = \frac{p}{2}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} - \frac{q}{2}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}$$

Et

$$\boxed{\{C,\mathcal{H}\} = \frac{p}{2}p + \frac{q}{2}\frac{1}{q^3} = \mathcal{H}}$$

4. Ecrire les équations de Hamilton du système.

$$\boxed{\begin{cases} q^{\bullet} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = p \\ p^{\bullet} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = \dfrac{1}{q^3} \end{cases}}$$

Comparer avec la question 2.

$$\boxed{\begin{cases} q^{\bullet} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \{q,\mathcal{H}\} \\ p^{\bullet} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = \{p,\mathcal{H}\} \end{cases}}$$

5. Montrer que C est une constante du mouvement.

$$dC(q,p,t) = \frac{\partial C}{\partial q}dq + \frac{\partial C}{\partial p}dp + \frac{\partial C}{\partial t}dt$$

Donc

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial q}q^{\bullet} + \frac{\partial C}{\partial p}p^{\bullet} + \frac{\partial C}{\partial t}$$

En remplaçant.

$$\frac{dC}{dt} = \left(\frac{p}{2} - t\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\right)p - \left(\frac{q}{2} - t\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\right)\frac{1}{q^3} - \mathcal{H}$$

Or

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\frac{1}{q^3} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = p$$

Donc

$$\frac{dC}{dt} = \left(\frac{p}{2} + t\frac{1}{q^3}\right)p + \left(\frac{q}{2} - tp\right)\frac{1}{q^3} - \left(\frac{p^2}{2} + \frac{1}{2q^2}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{C = \text{Constante}}$$

Aurions-nous pu déduire ce résultat à partir de la question 3 ?

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial q}q^{\bullet} + \frac{\partial C}{\partial p}p^{\bullet} + \frac{\partial C}{\partial t}$$

En utilisant les équations de Hamilton

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial q}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} - \frac{\partial C}{\partial p}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} + \frac{\partial C}{\partial t} = \{C,\mathcal{H}\} + \frac{\partial C}{\partial t} = \mathcal{H} - \mathcal{H} = 0$$

6. Trouver $q(t)$.

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2q^2} = A = \text{Constante}$$

$$C(q,p,t) = \frac{qp}{2} - t.A = B = \text{Constante}$$

En utilisant la deuxième équation.

$$\frac{qp}{2} = B + A.t \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{2(B + A.t)}{q}$$

En remplaçant dans la première équation

$$\frac{4(B + A.t)^2}{2q^2} + \frac{1}{2q^2} = A \qquad \Rightarrow \qquad q^2 = \frac{4(B + A.t)^2 + 1}{2A}$$

Et

$$q(t) = \sqrt{\frac{4(B + A.t)^2 + 1}{2A}}$$

Il reste à déterminer les constantes A et B.

Conditions initiales : $p(t = 0) = 0$ et $q(t = 0) = q_0$. Donc

$$A = \frac{1}{2q_0^2} \qquad \text{et} \qquad B = 0$$

Finalement

$$q(t) = \sqrt{2A.t^2 + \frac{1}{2A}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{q(t) = \sqrt{\frac{1}{q_0^2}t^2 + q_0^2}}$$