FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

EXERCICE 01: (12 *points*)

1. ***Nombre de degrés de liberté.***

02 degrés de liberté : Coordonnées généralisées (θ, φ).

2. ***Ecrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du système.***

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$T = \frac{1}{2}m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}m_2.v_2^2 \qquad \text{et} \qquad U = m_1gh_1 + m_2gh_2 + \frac{1}{2}k.x^2$$

Avec $m_1 = m_2 = m$.

En utilisant l'expression de la vitesse en coordonnées sphériques

$$\vec{v} = r^\bullet.\vec{e}_r + r.\theta^\bullet.\vec{e}_\theta + r.\sin\theta\,.\varphi^\bullet.\vec{e}_\varphi$$

Comme $r = a =$ constante. Donc

$$\vec{v} = a.\theta^\bullet.\vec{e}_\theta + a.\sin\theta\,.\varphi^\bullet.\vec{e}_\varphi \qquad \text{et} \qquad v_1^2 = v_2^2 = a^2.\left(\theta^{\bullet 2} + \sin^2\theta\,.\varphi^{\bullet 2}\right)$$

D'autre part

$$h_1 = h_2 = -a.\cos\theta \qquad \text{et} \qquad x = 2a.\cos\theta$$

En remplaçant

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}2ma^2.\left(\theta^{\bullet 2} + \sin^2\theta\,.\varphi^{\bullet 2}\right) - \frac{1}{2}4ka^2.\cos^2\theta + 2mga.\cos\theta$$

Ou

$$\boxed{\mathcal{L} = ma^2.\left(\theta^{\bullet 2} + \sin^2\theta\,.\varphi^{\bullet 2}\right) - 2ka^2.\cos^2\theta + 2mga.\cos\theta}$$

3. ***Ecrire les équations de Lagrange du système.***

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta^\bullet}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^\bullet}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(2ma^2\theta^\bullet) - \left(2ma^2\varphi^{\bullet 2}\sin\theta\,.\cos\theta + 4ka^2\sin\theta\,.\cos\theta - 2mga.\sin\theta\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}(2ma^2\sin^2\theta\,.\varphi^\bullet) - 0 = 0 \end{cases}$$

Et

$$\boxed{\begin{cases} ma^2\theta^{\bullet\bullet} - ma^2\varphi^{\bullet 2}\sin\theta\,.\cos\theta - 2ka^2\sin\theta\,.\cos\theta + mga.\sin\theta = 0 \\ \sin^2\theta\,.\varphi^{\bullet\bullet} + 2\sin\theta\,.\cos\theta\,.\theta^\bullet.\varphi^\bullet = 0 \end{cases}}$$

4. ***Trouver une variable cyclique du mouvement.***

φ est un variable cyclique, car elle n'apparait pas dans l'expression du Lagrangien alors que sa dérivée $\varphi^\bullet$ y apparait.

En déduire une intégrale première du mouvement.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^\bullet}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^\bullet}\right)=0$$

Donc, l'intégrale première du mouvement est

$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^\bullet}=2ma^2\sin^2\theta\,.\,\varphi^\bullet=\text{Constante}}$$

Elle représente la composante du moment cinétique suivant l'axe vertical (OZ).

5. *L'angle d'équilibre du losange dans le cas où le système ne tourne pas.*

Pour $(\varphi^\bullet=0)$, la première équation différentielle du mouvement devient

$$ma^2\theta^{\bullet\bullet}-2ka^2\sin\theta\,.\cos\theta+mga.\sin\theta=0$$

Et l'angle d'équilibre est obtenu en posant $\theta^{\bullet\bullet}_{\text{équilibre}}=0$. Donc

$$-2ka^2\sin\theta\,.\cos\theta+mga.\sin\theta=0 \qquad \Rightarrow \qquad \sin\theta\,.(mg-ka.\cos\theta)=0$$

D'où les solutions

$$\begin{cases}\sin\theta=0\\ ka.\cos\theta=mg\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\begin{cases}\theta_{\text{équilibre}}=0\\ \theta_{\text{équilibre}}=\arccos(mg/ka)\end{cases}}$$

6. *Calculer le Hamiltonien $\mathcal{H}$ du système.*

$$\mathcal{H}(\theta,\varphi,p_\theta,p_\varphi,t)=(p_\theta.\theta^\bullet+p_\varphi.\varphi^\bullet)-\mathcal{L}$$

Avec

$$\begin{cases}p_\theta=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta^\bullet}=2ma^2\theta^\bullet\\ p_\varphi=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^\bullet}=2ma^2\sin^2\theta\,.\,\varphi^\bullet\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases}\theta^\bullet=\dfrac{p_\theta}{2ma^2}\\ \varphi^\bullet=\dfrac{p_\varphi}{2ma^2\sin^2\theta}\end{cases}$$

D'où

$$\mathcal{H}=(p_\theta.\theta^\bullet+p_\varphi.\varphi^\bullet)-\left(ma^2.\left(\theta^{\bullet 2}+\sin^2\theta\,.\,\varphi^{\bullet 2}\right)-2ka^2.\cos^2\theta+2mga.\cos\theta\right)$$

En remplaçant p_θ et p_φ.

$$\mathcal{H}=\left(2ma^2.\left(\theta^{\bullet 2}+\sin^2\theta\,.\,\varphi^{\bullet 2}\right)\right)-\left(ma^2.\left(\theta^{\bullet 2}+\sin^2\theta\,.\,\varphi^{\bullet 2}\right)-2ka^2.\cos^2\theta+2mga.\cos\theta\right)$$

Donc

$$\mathcal{H}=ma^2.\left(\theta^{\bullet 2}+\sin^2\theta\,.\,\varphi^{\bullet 2}\right)+2ka^2.\cos^2\theta-2mga.\cos\theta=T+U$$

En remplaçant $\theta^\bullet$ et $\varphi^\bullet$.

$$\mathcal{H}=ma^2.\left(\left(\frac{p_\theta}{2ma^2}\right)^2+\sin^2\theta\,.\left(\frac{p_\varphi}{2ma^2\sin^2\theta}\right)^2\right)+2ka^2.\cos^2\theta-2mga.\cos\theta$$

$$\boxed{\mathcal{H}=\frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{2ma^2}+\frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{2ma^2\sin^2\theta}+2ka^2.\cos^2\theta-2mga.\cos\theta}$$

7. *Ecrire les équations de Hamilton du système.*

$$\begin{cases} \theta^{\bullet} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} \\ p_\theta^{\bullet} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \theta^{\bullet} = \dfrac{p_\theta}{2ma^2} \\ p_\theta^{\bullet} = \dfrac{p_\varphi^2}{2ma^2}\sin^{-3}\theta\,.\cos\theta + 4ka^2.\sin\theta\,.\cos\theta - 2mga.\sin\theta \end{cases}}$$

Et

$$\begin{cases} \varphi^{\bullet} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\varphi} \\ p_\varphi^{\bullet} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \varphi^{\bullet} = \dfrac{p_\varphi}{2ma^2\sin^2\theta} \\ p_\varphi^{\bullet} = 0 \end{cases}}$$

En prenant la dérivée par rapport au temps de la première équation pour chaque coordonné

$$\theta^{\bullet\bullet} = \frac{p_\theta^{\bullet}}{2ma^2} \qquad \text{et} \qquad \varphi^{\bullet\bullet} = \frac{p_\varphi^{\bullet}}{2ma^2\sin^2\theta} + \frac{p_\varphi^2}{2ma^2}\sin^{-3}\theta\,.\cos\theta\,.\theta^{\bullet}$$

Avec $p_\varphi^{\bullet} = 0$ donc $p_\varphi = 2ma^2\sin^2\theta\,.\varphi^{\bullet} = \text{constante.}$

En remplaçant $p_\theta^{\bullet}$ et p_φ il vient que

$$\begin{cases} 2ma^2\theta^{\bullet\bullet} = p_\theta^{\bullet} = \dfrac{p_\varphi^2}{2ma^2}\sin^{-3}\theta\,.\cos\theta + 4ka^2.\sin\theta\,.\cos\theta - 2mga.\sin\theta \\ (2ma^2\sin^2\theta\,\varphi^{\bullet})^{\bullet} = p_\varphi^{\bullet} = 0 \end{cases}$$

Puis

$$\boxed{\begin{cases} ma^2\theta^{\bullet\bullet} = ma^2\varphi^{\bullet 2}\sin\theta\,.\cos\theta + 2ka^2.\sin\theta\,.\cos\theta - mga.\sin\theta \\ \sin^2\theta\,.\varphi^{\bullet\bullet} + 2\sin\theta\,.\cos\theta\,.\theta^{\bullet}.\varphi^{\bullet} = 0 \end{cases}}$$

Se sont les mêmes équations trouvées par le formalisme de Lagrange.

8. *Hamiltonien.*

Le Hamiltonien (ainsi que le Lagrangien) ne dépend pas explicitement du temps, alors le Hamiltonien est une intégrale première du mouvement

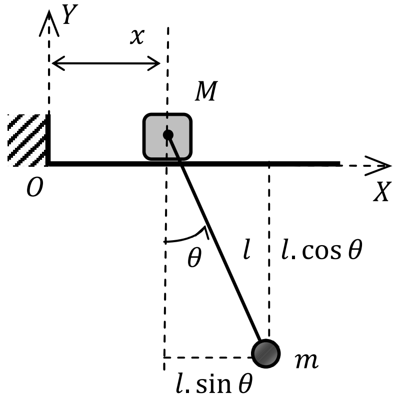
$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{H} = \text{constante}$$

Puisque l'énergie potentielle ne dépend que des coordonnées généralisées (θ, φ) alors

$$\mathcal{H} = T + U = E_m$$

EXERCICE 02: (08 *points*)

1. ***Ecrire la vitesse $\vec{v}_m$ de la masse m.***



$$\begin{cases} x_m = x + l.\sin\theta \\ y_m = -l.\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_m^\bullet = x^\bullet + l\theta^\bullet.\cos\theta \\ y_m^\bullet = +l\theta^\bullet.\sin\theta \end{cases}$$

Donc

$$\boxed{\vec{v}_m = (x^\bullet + l\theta^\bullet.\cos\theta)\vec{e}_x + (l\theta^\bullet.\sin\theta)\vec{e}_y}$$

Et son module

$$v_m = \sqrt{(x^\bullet + l\theta^\bullet.\cos\theta)^2 + (l\theta^\bullet.\sin\theta)^2}$$

D'où

$$v_m = \sqrt{x^{\bullet 2} + l^2\theta^{\bullet 2} + 2l\theta^\bullet x^\bullet \cos\theta}$$

En faisant l'approximation $\cos\theta \approx 1$ dans le cas des petites oscillations.

$$\boxed{v_m \approx \sqrt{x^{\bullet 2} + l^2\theta^{\bullet 2} + 2l\theta^\bullet x^\bullet} = x^\bullet + l\theta^\bullet}$$

2. ***Ecrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du système.***

$$T = \frac{1}{2}m.v_m^2 + \frac{1}{2}M.v_M^2 \qquad \text{et} \qquad U = mgh$$

Avec $v_M = x^\bullet$ et $h = y_m = -l.\cos\theta$. En remplaçant

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m.(x^\bullet + l\theta^\bullet)^2 + \frac{1}{2}M.x^{\bullet 2} + mgl.\cos\theta$$

Ou

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2.\theta^{\bullet 2} + \frac{1}{2}(M+m).x^{\bullet 2} + ml\theta^\bullet x^\bullet + mgl.\cos\theta}$$

3. ***Ecrire les équations de Lagrange du système.***

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\bullet}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta^\bullet}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\big((M+m).x^\bullet + ml\theta^\bullet\big) - 0 = 0 \\ \frac{d}{dt}(ml^2.\theta^\bullet + ml.x^\bullet) + mgl.\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Et

$$\boxed{\begin{cases} (M+m).x^{\bullet\bullet} + ml\theta^{\bullet\bullet} = 0 \\ ml^2.\theta^{\bullet\bullet} + ml.x^{\bullet\bullet} + mgl.\sin\theta = 0 \end{cases}}$$

4. ***Trouver une variable cyclique du mouvement.***

x est un variable cyclique, car elle n'apparait pas dans l'expression du Lagrangien alors que sa dérivée $x^\bullet$ y apparait.

En déduire une intégrale première du mouvement.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\bullet}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\bullet}\right) = 0$$

Donc, l'intégrale première du mouvement est

$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\bullet} = (M+m).x^\bullet + ml\theta^\bullet = M.x^\bullet + m.(x^\bullet + l\theta^\bullet) = \text{Constante}}$$

Elle représente la projection de la quantité de mouvement totale du système suivant l'axe (OX) (dans l'approximation des petits angles).

5. ***Pulsation propre des oscillations de petites amplitudes.***

En reprenant les équations du mouvement

$$\begin{cases} (M+m).x^{\bullet\bullet} + ml\theta^{\bullet\bullet} = 0 \\ ml^2.\theta^{\bullet\bullet} + ml.x^{\bullet\bullet} + mgl.\sin\theta = 0 \end{cases}$$

La première équation donne

$$x^{\bullet\bullet} = -\frac{ml}{M+m}\theta^{\bullet\bullet} \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

En remplaçant dans la seconde équation

$$ml^2.\theta^{\bullet\bullet} - \frac{m^2l^2}{M+m}\theta^{\bullet\bullet} + mgl.\sin\theta = 0$$

Dans le cas des oscillations de petites amplitudes $(\sin\theta \approx \theta)$ on trouve

$$\frac{Ml}{M+m}\theta^{\bullet\bullet} = -g.\theta \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\theta^{\bullet\bullet} = -\frac{g}{l}\frac{M+m}{M}\theta = -\omega_0^2.\theta} \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

D'où la pulsation propre des oscillations

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}\frac{M+m}{M}}}$$

6. ***Les équations horaires du mouvement.***

La solution de l'équation différentielle (2) est de la forme

$$\theta(t) = A.\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

En appliquant la condition initiale $\theta^{\bullet}(t=0) = 0$ on a

$$\theta^{\bullet}(0) = A\omega_0.\cos(\varphi) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \pi/2$$

En appliquant la condition initiale $\theta(t=0) = \theta_0$ on a

$$\theta(0) = \theta_0 = A.\sin(\pi/2) \qquad \Rightarrow \qquad A = \theta_0$$

D'où, l'équation horaire

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0.\sin(\omega_0 t + \pi/2) = \theta_0.\cos(\omega_0 t)}$$

En intégrant l'équation (1) on trouve

$$x^{\bullet} - x_0^{\bullet} = -\frac{ml}{M+m}(\theta^{\bullet} - \theta_0^{\bullet})$$

Or $x_0^{\bullet} = 0$ et $\theta_0^{\bullet} = 0$ (les vitesses initiales des deux masses sont nulles). Donc

$$x^{\bullet} = -\frac{ml}{M+m}\theta^{\bullet}$$

En intégrant à nouveau

$$x - x_0 = -\frac{ml}{M+m}(\theta - \theta_0)$$

D'où

$$\boxed{x(t) = -\frac{ml}{M+m}(\theta_0.\cos(\omega_0 t) - \theta_0) + x_0}$$