FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

EXERCICE 01: (12 *points*)

1. ***Contrainte*** : La longueur du fil est constante.

$$z + r = l = \text{constante} \qquad \Rightarrow \qquad z = l - r \qquad \text{et} \qquad z^{\bullet} = -r^{\bullet}$$

La masse m se déplace dans le plan, elle possède deux degrés de liberté.
La masse M se déplace sur une droite, elle a un seul degré de liberté.
03 degrés de liberté – 01 contrainte = 02 degrés de liberté : Coordonnées généralisées (r, θ).

2. ***Ecrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du système.***

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$T = \frac{1}{2}m.v^2 + \frac{1}{2}M.V^2 \qquad \text{et} \qquad U = mgh + MgH$$

En utilisant l'expression de la vitesse en coordonnées polaires

$$\vec{v} = r^{\bullet}.\vec{e}_r + r.\theta^{\bullet}.\vec{e}_\theta \qquad \text{et} \qquad \vec{V} = z^{\bullet}.\vec{e}_z = -r^{\bullet}.\vec{e}_z$$

D'autre part

$$h = 0 = \text{constante} \qquad \text{et} \qquad H = -z = r - l$$

En remplaçant

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(r^{\bullet 2} + r^2\theta^{\bullet 2}\right) + \frac{1}{2}M.r^{\bullet 2} - Mgr + Mgl$$

Ou

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m+M).r^{\bullet 2} + \frac{1}{2}mr^2\theta^{\bullet 2} - Mgr}$$

3. ***Ecrire les équations de Lagrange du système.***

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial r^{\bullet}}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^{\bullet}}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left((m+M)r^{\bullet}\right) - \left(m\theta^{\bullet 2}r - Mg\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}(mr^2\theta^{\bullet}) - 0 = 0 \end{cases}$$

Et

$$\boxed{\begin{cases} (m+M)r^{\bullet\bullet} - m\theta^{\bullet 2}r + Mg = 0 \\ 2mr.r^{\bullet}\theta^{\bullet} + mr^2\theta^{\bullet\bullet} = 0 \end{cases}}$$

4. ***Trouver une variable cyclique du mouvement.***

θ est un variable cyclique, car elle n'apparait pas dans l'expression du Lagrangien alors que sa dérivée $\theta^{\bullet}$ y apparait.

En déduire une intégrale première du mouvement.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^{\bullet}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^{\bullet}}\right) = 0$$

Donc, l'intégrale première du mouvement est

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^{\bullet}} = mr^2\theta^{\bullet} = \text{Constante}}$$

Elle représente la composante du moment cinétique total suivant l'axe vertical (OZ).

5. L'équation différentielle de la variable r.

$$mr^2\theta^{\bullet} = A = \text{Constante} \qquad \Rightarrow \qquad \theta^{\bullet} = \frac{A}{mr^2}$$

En remplaçant dans la première équation différentielle

$$(m+M)r^{\bullet\bullet} - m\theta^{\bullet 2}r + Mg = (m+M)r^{\bullet\bullet} - m\left(\frac{A}{mr^2}\right)^2 r + Mg = 0$$

D'où

$$\boxed{(m+M)r^{\bullet\bullet} - \frac{A^2}{mr^3} + Mg = 0}$$

6. ***Cas du mouvement circulaire.*** $r = R = \text{Constante}$ et $r^{\bullet\bullet} = 0$

$$-\frac{A^2}{mR^3} + Mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{R = \left(\frac{A^2}{M.m.g}\right)^{1/3}}$$

Et en fonction de la vitesse angulaire ($\theta^{\bullet} = \omega = \text{Constante}$) de la masse m.

$$-\frac{m^2R^4\theta^{\bullet 2}}{mR^3} + Mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{R = \frac{Mg}{m.\omega^2}}$$

7. ***Calculer le Hamiltonien $\mathcal{H}$ du système.***

$$\mathcal{H}(r,\theta,p_r,p_\theta,t) = (p_r.r^{\bullet} + p_\theta.\theta^{\bullet}) - \mathcal{L}$$

Avec

$$\begin{cases} p_r = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial r^{\bullet}} = (m+M)r^{\bullet} \\ p_\theta = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^{\bullet}} = mr^2\theta^{\bullet} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} r^{\bullet} = \dfrac{p_r}{m+M} \\ \theta^{\bullet} = \dfrac{p_\theta}{mr^2} \end{cases}$$

D'où

$$\mathcal{H} = (p_r.r^{\bullet} + p_\theta.\theta^{\bullet}) - \left(\frac{1}{2}(m+M).r^{\bullet 2} + \frac{1}{2}mr^2\theta^{\bullet 2} - Mgr\right)$$

En remplaçant $r^{\bullet}$ et $\theta^{\bullet}$.

$$\mathcal{H} = \left(\frac{p_r^2}{m+M} + \frac{p_\theta^2}{mr^2}\right) - \left(\frac{1}{2}(m+M).\frac{p_r^2}{(m+M)^2} + \frac{1}{2}mr^2\frac{p_\theta^2}{(mr^2)^2} - Mgr\right)$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{1}{2}\frac{p_r^2}{m+M} + \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{mr^2} + Mgr}$$

8. ***Ecrire les équations de Hamilton du système.***

$$\begin{cases} r^{\bullet} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} \\ p_r^{\bullet} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} r^{\bullet} = \dfrac{p_r}{m+M} \\ p_r^{\bullet} = \dfrac{p_\theta^2}{mr^3} - Mg \end{cases}}$$

Et

$$\begin{cases} \theta^{\bullet} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} \\ p_\theta^{\bullet} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} \theta^{\bullet} = \dfrac{p_\theta}{mr^2} \\ p_\theta^{\bullet} = 0 \end{cases}}$$

En prenant la dérivée par rapport au temps de la première équation pour chaque coordonné

$$r^{\bullet\bullet} = \frac{p_r^{\bullet}}{m+M} \qquad \text{et} \qquad \theta^{\bullet\bullet} = \frac{p_\theta^{\bullet}}{mr^2} - 2\frac{p_\theta}{mr^3}r^{\bullet} = -2\frac{p_\theta}{mr^3}r^{\bullet}$$

Avec $p_\theta^{\bullet}$ donc $p_\varphi = mr^2\theta^{\bullet} = \text{constante.}$

En remplaçant $p_r^{\bullet}$ et p_θ il vient que

$$\begin{cases} (m+M)r^{\bullet\bullet} = p_r^{\bullet} = \dfrac{p_\theta^2}{mr^3} - Mg \\ mr^3.\theta^{\bullet\bullet} = -2r^{\bullet}.p_\theta \end{cases}$$

Comme $p_\theta = mr^2\theta^{\bullet}$ nous obtenons

$$\boxed{\begin{cases} (m+M)r^{\bullet\bullet} = mr.\theta^{\bullet 2} - Mg \\ r.\theta^{\bullet\bullet} = -2r^{\bullet}\theta^{\bullet} \end{cases}}$$

Se sont les mêmes équations trouvées par le formalisme de Lagrange.

9. Le Hamiltonien (ainsi que le Lagrangien) ne dépend pas explicitement du temps, alors le Hamiltonien est une intégrale première du mouvement

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{H} = \text{constante}$$

10. Puisque l'énergie potentielle ne dépend que des coordonnées généralisées (θ, φ) alors

$$\mathcal{H} = T + U = E_m$$

EXERCICE 02: (08 *points*)

$$\mathcal{H}(q,p)=\frac{\alpha^2}{2m}\frac{p^2}{q^2}-\beta.q^2$$

1. ***Dire pourquoi $\mathcal{H}$ est une constante du mouvement.***

$\mathcal{H}(q,p)$ ne dépend pas explicitement du temps. Comme :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{H}=\text{Constante}$$

2. ***Ecrire les équations de Hamilton du système.***

$$\boxed{\begin{cases} q^\bullet=\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}=\dfrac{\alpha^2}{m}\dfrac{p}{q^2} \\ p^\bullet=-\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}=\dfrac{\alpha^2}{m}\dfrac{p^2}{q^3}+2\beta.q \end{cases}}$$

3. ***Transformation.***

$$Q=\frac{q^2}{2\alpha} \quad \text{et} \quad P=\alpha\frac{p}{q}$$

Pour que la transformation soit canonique, elle doit vérifier : $\{q,p\}_{Q,P}=\{Q,P\}_{q,p}=1$

$$\{Q,P\}_{q,p}=\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}-\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}$$

En dérivant

$$\{Q,P\}_{q,p}=\frac{q}{\alpha}\frac{\alpha}{q}-0.\left(-\alpha\frac{p}{q^2}\right)=1$$

__**La transformation est canonique**__.

4. ***Nouvel Hamiltonien.***

$$\begin{cases} Q=\dfrac{q^2}{2\alpha} \\ P=\alpha\dfrac{p}{q} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} q=\sqrt{2\alpha.Q} \\ p=\dfrac{Pq}{\alpha}=P\sqrt{\dfrac{2}{\alpha}Q} \end{cases}$$

En remplaçant dans l'expression de l'Hamiltonien

$$H(Q,P)=\frac{\alpha^2}{2m}\frac{P^2(2/\alpha)Q}{2\alpha.Q}-\beta.2\alpha.Q$$

D'où

$$\boxed{H(Q,P)=\frac{P^2}{2m}-2\alpha\beta.Q}$$

5. ***Equations de Hamilton.***

$$\begin{cases} Q^\bullet=\dfrac{\partial H}{\partial P}=\dfrac{P}{m} \\ P^\bullet=-\dfrac{\partial H}{\partial Q}=2\alpha\beta \end{cases}$$

En intégrant ces deux équations différentielles en commençant par la deuxième

$$\begin{cases} Q^{\bullet} = \dfrac{P}{m} = \dfrac{2\alpha\beta}{m}t + \dfrac{P_0}{m} \\ P = 2\alpha\beta.t + P_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} Q(t) = \dfrac{\alpha\beta}{m}t^2 + \dfrac{P_0}{m}t + Q_0 \\ P(t) = 2\alpha\beta.t + P_0 \end{cases}}$$

Q_0 et P_0 sont des constantes d'intégrations déterminée à partir des conditions initiales.

6. ***Solution en q et p. En remplaçant :***

$$\begin{cases} q = \sqrt{2\alpha.Q} \\ p = \dfrac{Pq}{\alpha} = P\sqrt{\dfrac{2}{\alpha}Q} \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} q(t) = \left(\dfrac{2\alpha^2\beta}{m}t^2 + \dfrac{2\alpha P_0}{m}t + 2\alpha Q_0\right)^{1/2} \\ p(t) = (2\alpha\beta.t + P_0)\left(\dfrac{2\beta}{m}t^2 + \dfrac{2P_0}{\alpha m}t + \dfrac{2Q_0}{\alpha}\right)^{1/2} \end{cases}}$$

7. En comparant les réponses aux questions 2 et 5, nous remarquons que la transformation nous aidé à obtenir **des équations différentielles plus simples à intégrer**.