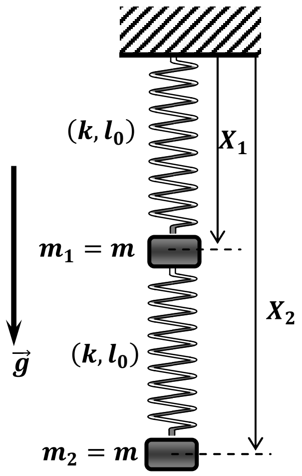
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

EXERCICE 01: (12 points)



1. **Energie potentielle en fonction de X_1 et X_2.**

Elongation du premier ressort : $(X_1 - l_0)$
Elongation du Deuxième ressort : $(X_2 - X_1 - l_0)$
Hauteurs

$$h_1 = -X_1 \quad ; \quad h_2 = -X_2$$

L'énergie potentielle du système

$$\boxed{U = \frac{1}{2}k(X_1 - l_0)^2 + \frac{1}{2}k(X_2 - X_1 - l_0)^2 - mg(X_1 + X_2)}$$

2. **Positions d'équilibre.**

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = k(X_1 - l_0) - k(X_2 - X_1 - l_0) - mg = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial X_2} = k(X_2 - X_1 - l_0) - mg = 0$$

D'où le système d'équations

$$\begin{cases} 2k.X_1 - k.X_2 = mg \\ -k.X_1 + k.X_2 = mg + kl_0 \end{cases}$$

Dont la résolution donne

$$\boxed{X_{1\text{équ}} = 2\frac{mg}{k} + l_0} \quad ; \quad \boxed{X_{2\text{équ}} = 3\frac{mg}{k} + 2l_0}$$

3. **Positions par rapport à l'équilibre.**

$$\begin{cases} x_1 = X_1 - X_{1\text{équ}} \\ x_2 = X_2 - X_{2\text{équ}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = x_1 + X_{1\text{équ}} = x_1 + (2\,mg/k) + l_0 \\ X_2 = x_2 + X_{2\text{équ}} = x_2 + (3\,mg/k) + 2l_0 \end{cases}$$

En remplaçant dans l'expression de U.

$$U = \frac{1}{2}k\big(x_1 + (2\,mg/k)\big)^2 + \frac{1}{2}k\big(x_2 - x_1 - (mg/k)\big)^2 - mg(x_2 + x_1 + (5mg/k) + 3l_0)$$

En développant

$$U = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k(2\,mg/k)^2 + 2mgx_1 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(mg/k)^2 + mg(x_2 - x_1) - mg(x_2 + x_1 + (5mg/k) + 3l_0)$$

$$U = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + (2mg - 2mg).x_1 + (mg - mg).x_2 + \frac{1}{2}\frac{m^2g^2}{k} - 5\frac{m^2g^2}{k} + 2\frac{m^2g^2}{k} - 3mgl_0$$

Donc

$$U = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 - \frac{5}{2}\frac{m^2g^2}{k} - 3mgl_0$$

Finalement

$$\boxed{U = \frac{1}{2}k.x_1^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 + \text{Constante}}$$

4. Lagrangien.

$$\mathcal{L} = T - U$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}m_2.v_2^2 = \frac{1}{2}m.\left(\dot{X}_1^2 + \dot{X}_2^2\right) = \frac{1}{2}m.\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right)$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}m.\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \frac{1}{2}k.x_1^2 - \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2}$$

5. Equations de Lagrange. (on pose : $\omega_0^2 = k/m$).

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(m\dot{x}_1) - \left(-kx_1 - k(x_1 - x_2)\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}(m\dot{x}_2) - \left(+k(x_1 - x_2)\right) = 0 \end{cases}$$

D'où les équations du mouvement (système d'équations différentielles) suivantes :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \boxed{\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\omega_0^2.x_1 - \omega_0^2.x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2.x_2 - \omega_0^2.x_1 = 0 \end{cases}} \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = k/m$$

6. Pulsations propres.

En posant les solutions de la forme :

$$x_1 = A_1.\sin(\omega t + \varphi) \quad ; \quad x_2 = A_2.\sin(\omega t + \varphi)$$
$$\ddot{x}_1 = -\omega^2.A_1.\sin(\omega t + \varphi) \quad ; \quad \ddot{x}_2 = -\omega^2.A_2.\sin(\omega t + \varphi)$$

D'où le système d'équations différentielles se ramène a un *système d'équations linéaires*

$$\begin{cases} (2\omega_0^2 - \omega^2).A_1 - \omega_0^2.A_2 = 0 \\ -\omega_0^2.A_1 + (\omega_0^2 - \omega^2).A_2 = 0 \end{cases}$$

Le système d'équations linéaires étant sans second membre, le déterminant doit être nulle pour que les solutions ne soient pas triviales (égales à 0).

$$\begin{vmatrix} (2\omega_0^2 - \omega^2) & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

D'où l'équation caractéristique

$$(2\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2) - \omega_0^4 = 0$$

Ou

$$(\omega^2)^2 - 3\omega_0^2.\omega^2 + \omega_0^4 = 0$$

C'est une équation du deuxième ordre d'inconnue ω^2, dont les solutions sont :

$$\boxed{\omega_{\text{Fondamentale}}^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\omega_0^2} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_{\text{Harmonique}}^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\omega_0^2}$$

7. Forme générale des solutions.

<u>Pour $\omega = \omega_{\text{Fondamentale}}$</u> (en remplaçant dans le système d'équations linéaires)

$$\begin{cases} \left(2\omega_0^2 - \left(3 - \sqrt{5}\right)\omega_0^2/2\right).A_1 - \omega_0^2.A_2 = 0 \\ -\omega_0^2.A_1 + \left(\omega_0^2 - \left(3 - \sqrt{5}\right)\omega_0^2/2\right).A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}A_2}$$

Pour $\omega = \omega_{\text{Harmonique}}$ (en remplaçant dans le système d'équations linéaires)

$$\begin{cases} \left(2\omega_0^2 - \left(3+\sqrt{5}\right)\omega_0^2/2\right).A_1 - \omega_0^2.A_2 = 0 \\ -\omega_0^2.A_1 + \left(\omega_0^2 - \left(3+\sqrt{5}\right)\omega_0^2/2\right).A_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_1 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2} A_2}$$

D'où la forme générale des solutions :

$$\boxed{\begin{cases} x_1(t) = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) A_{\text{F}}.\sin(\omega_{\text{F}} t + \varphi_{\text{F}}) + \left(\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}\right) A_{\text{H}}.\sin(\omega_{\text{H}} t + \varphi_{\text{H}}) \\ x_2(t) = A_{\text{F}}.\sin(\omega_{\text{F}} t + \varphi_{\text{F}}) + A_{\text{H}}.\sin(\omega_{\text{H}} t + \varphi_{\text{H}}) \end{cases}}$$

Tel que : $A_{\text{H}},\ A_{\text{F}},\ \varphi_{\text{H}},\ \varphi_{\text{F}}$ sont des constantes d'intégrations, elles sont déterminées à partir des conditions initiales sur les positions $x_1(0)\,, x_2(0)$ et les vitesses $\dot{x}_1(0)\,, \dot{x}_2(0)$.

EXERCICE 02: (08 points)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^{2} + \dot{q}_2^{2}\right) - \frac{1}{2}\omega_0^2(q_1^2 + q_2^2) + \alpha.\, q_1 q_2 \qquad ; \qquad (\omega_0^2 > \alpha)$$

1. **Equations du mouvement.**

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\dot{q}_1) - (-\omega_0^2 q_1 + \alpha q_2) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}(\dot{q}_2) - (-\omega_0^2 q_2 + \alpha q_1) = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 - \alpha q_2 = 0 \\ \ddot{q}_2 + \omega_0^2 q_2 - \alpha q_1 = 0 \end{cases}}$$

2. On pose $q_1 = Q_1 + Q_2$ et $q_2 = Q_1 - Q_2$. Donc $\ddot{q}_1 = \ddot{Q}_1 + \ddot{Q}_2$ et $\ddot{q}_2 = \ddot{Q}_1 - \ddot{Q}_2$.

$$\begin{cases} \ddot{Q}_1 + \ddot{Q}_2 + \omega_0^2 Q_1 + \omega_0^2 Q_2 - \alpha Q_1 + \alpha Q_2 = 0 \\ \ddot{Q}_1 - \ddot{Q}_2 + \omega_0^2 Q_1 - \omega_0^2 Q_2 - \alpha Q_1 - \alpha Q_2 = 0 \end{cases}$$

En faisant la **somme** des deux équations nous avons

$$2\ddot{Q}_1 + 2\omega_0^2 Q_1 - 2\alpha Q_1 = 0$$

Ou

$$\boxed{\ddot{Q}_1 + (\omega_0^2 - \alpha)Q_1 = 0} \qquad ; \qquad \omega_0^2 - \alpha > 0$$

En faisant la **différence** des deux équations nous avons

$$2\ddot{Q}_2 + 2\omega_0^2 Q_2 + 2\alpha Q_2 = 0$$

Ou

$$\boxed{\ddot{Q}_2 + (\omega_0^2 + \alpha)Q_2 = 0} \qquad ; \qquad \omega_0^2 + \alpha > 0$$

3. **Solutions de ce système.**

Les deux équations précédentes sont des équations différentielles d'oscillateurs harmoniques

$$\begin{cases} \ddot{Q}_1 + \omega_F^2.\, Q_1 = 0 & \text{avec} \quad \omega_F^2 = \omega_0^2 - \alpha \\ \ddot{Q}_2 + \omega_H^2.\, Q_2 = 0 & \text{avec} \quad \omega_H^2 = \omega_0^2 + \alpha \end{cases}$$

Donc, les solutions sont de la forme :

$$\begin{cases} Q_1(t) = A_F.\sin(\omega_F t + \varphi_F) & \text{avec} \quad \omega_F = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha} \\ Q_2(t) = A_H.\sin(\omega_H t + \varphi_H) & \text{avec} \quad \omega_H = \sqrt{\omega_0^2 + \alpha} \end{cases}$$

Et les solutions originelles du système : $q_1 = Q_1 + Q_2$ et $q_2 = Q_1 - Q_2$.

$$\boxed{\begin{cases} q_1(t) = A_F.\sin(\omega_F t + \varphi_F) + A_H.\sin(\omega_H t + \varphi_H) \\ q_2(t) = A_F.\sin(\omega_F t + \varphi_F) - A_H.\sin(\omega_H t + \varphi_H) \end{cases}}$$

4. **Hamiltonien du système.**

Les moments conjugués :

$$p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1 \qquad ; \qquad p_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_2$$

Le Hamiltonien

$$\mathcal{H} = (p_1 q_1^{\bullet} + p_2 q_2^{\bullet}) - \mathcal{L}$$

Donc

$$\mathcal{H} = p_1^2 + p_2^2 - \left(\frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{2}\omega_0^2(q_1^2 + q_2^2) + \alpha . q_1 q_2\right)$$

Et

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}\omega_0^2(q_1^2 + q_2^2) - \alpha . q_1 q_2}$$

5. Le nouveau Lagrangien $L(Q_1, Q_2, Q_1^{\bullet}, Q_2^{\bullet})$.

$$\begin{cases} q_1 = Q_1 + Q_2 \\ q_2 = Q_1 - Q_2 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} q_1^{\bullet} = Q_1^{\bullet} + Q_2^{\bullet} \\ q_2^{\bullet} = Q_1^{\bullet} - Q_2^{\bullet} \end{cases}$$

En remplaçant dans l'expression du Lagrangien

$$L = \frac{1}{2}((Q_1^{\bullet} + Q_2^{\bullet})^2 + (Q_1^{\bullet} - Q_2^{\bullet})^2) - \frac{1}{2}\omega_0^2((Q_1 + Q_2)^2 + (Q_1 - Q_2)^2) + \alpha(Q_1 + Q_2)(Q_1 - Q_2)$$

En développant

$$\boxed{L(Q_1, Q_2, Q_1^{\bullet}, Q_2^{\bullet}) = \left({Q_1^{\bullet}}^2 + {Q_2^{\bullet}}^2\right) - \omega_0^2\left({Q_1}^2 + {Q_2}^2\right) + \alpha\left({Q_1}^2 - {Q_2}^2\right)}$$

6. Les moments conjugués (P_1, P_2).

$$\boxed{P_1 = \frac{\partial L}{\partial Q_1^{\bullet}} = 2Q_1^{\bullet}} \quad ; \quad \boxed{P_2 = \frac{\partial L}{\partial Q_2^{\bullet}} = 2Q_2^{\bullet}}$$

7. Transformation $(q_1, q_2, p_1, p_2) \to (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$.

$$\begin{cases} q_1 = Q_1 + Q_2 \\ q_2 = Q_1 - Q_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} q_1^{\bullet} = Q_1^{\bullet} + Q_2^{\bullet} \\ q_2^{\bullet} = Q_1^{\bullet} - Q_2^{\bullet} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q_1^{\bullet} = p_1 \\ q_2^{\bullet} = p_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Q_1^{\bullet} = P_1/2 \\ Q_2^{\bullet} = P_2/2 \end{cases}$$

D'où la transformation

$$\boxed{\begin{cases} q_1 = Q_1 + Q_2 \\ q_2 = Q_1 - Q_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} p_1 = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \\ p_2 = \frac{1}{2}(P_1 - P_2) \end{cases}}$$

En utilisant les crochets de Poisson, nous vérifions les règles de conjugaison canonique.

$$\{q_1, q_2\}_{Q,P} = \left(\frac{\partial q_1}{\partial Q_1}\frac{\partial q_2}{\partial P_1} - \frac{\partial q_1}{\partial P_1}\frac{\partial q_2}{\partial Q_1}\right) + \left(\frac{\partial q_1}{\partial Q_2}\frac{\partial q_2}{\partial P_2} - \frac{\partial q_1}{\partial P_2}\frac{\partial q_2}{\partial Q_2}\right) = 0$$

$$\{p_1, p_2\}_{Q,P} = \left(\frac{\partial p_1}{\partial Q_1}\frac{\partial p_2}{\partial P_1} - \frac{\partial p_1}{\partial P_1}\frac{\partial p_2}{\partial Q_1}\right) + \left(\frac{\partial p_1}{\partial Q_2}\frac{\partial p_2}{\partial P_2} - \frac{\partial p_1}{\partial P_2}\frac{\partial p_2}{\partial Q_2}\right) = 0$$

$$\{q_1, p_1\}_{Q,P} = \left(\frac{\partial q_1}{\partial Q_1}\frac{\partial p_1}{\partial P_1} - \frac{\partial q_1}{\partial P_1}\frac{\partial p_1}{\partial Q_1}\right) + \left(\frac{\partial q_1}{\partial Q_2}\frac{\partial p_1}{\partial P_2} - \frac{\partial q_1}{\partial P_2}\frac{\partial p_1}{\partial Q_2}\right) = \left(1\frac{1}{2} - 0\right) + \left(1\frac{1}{2} - 0\right) = 1$$

$$\{q_2, p_2\}_{Q,P} = \left(\frac{\partial q_2}{\partial Q_1}\frac{\partial p_2}{\partial P_1} - \frac{\partial q_2}{\partial P_1}\frac{\partial p_2}{\partial Q_1}\right) + \left(\frac{\partial q_2}{\partial Q_2}\frac{\partial p_2}{\partial P_2} - \frac{\partial q_2}{\partial P_2}\frac{\partial p_2}{\partial Q_2}\right) = \left(1\frac{1}{2} - 0\right) + \left((-1)\left(-\frac{1}{2}\right) - 0\right) = 1$$

$$\{q_1, p_2\}_{Q,P} = \left(\frac{\partial q_1}{\partial Q_1}\frac{\partial p_2}{\partial P_1} - \frac{\partial q_1}{\partial P_1}\frac{\partial p_2}{\partial Q_1}\right) + \left(\frac{\partial q_1}{\partial Q_2}\frac{\partial p_2}{\partial P_2} - \frac{\partial q_1}{\partial P_2}\frac{\partial p_2}{\partial Q_2}\right) = \left(1\frac{1}{2} - 0\right) + \left(1\left(-\frac{1}{2}\right) - 0\right) = 0$$

$$\{q_2, p_1\}_{Q,P} = \left(\frac{\partial q_2}{\partial Q_1}\frac{\partial p_1}{\partial P_1} - \frac{\partial q_2}{\partial P_1}\frac{\partial p_1}{\partial Q_1}\right) + \left(\frac{\partial q_2}{\partial Q_2}\frac{\partial p_1}{\partial P_2} - \frac{\partial q_2}{\partial P_2}\frac{\partial p_1}{\partial Q_2}\right) = \left(1\frac{1}{2} - 0\right) + \left((-1)\frac{1}{2} - 0\right) = 0$$

La transformation est donc canonique.