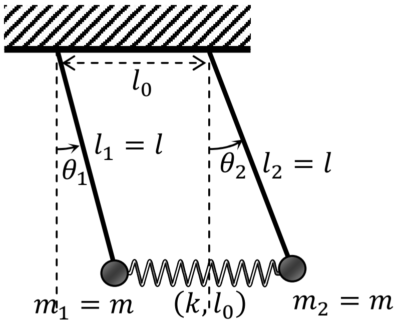
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

EXERCICE 01: (10 points)



1. **Lagrangien.**

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}m_2.v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2$$

D'où

$$T = \frac{1}{2}ml^2.\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right)$$

Energie potentielle

$$U = m_1 g.h_1 + m_2 g.h_2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$$

Avec

$$\begin{cases} h_1 = -l.\cos\theta_1 \approx -l.(1 - \theta_1^2/2) \\ h_2 = -l.\cos\theta_2 \approx -l.(1 - \theta_2^2/2) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1 = l.\sin\theta_1 \approx l.\theta_1 \\ x_2 = l.\sin\theta_2 \approx l.\theta_2 \end{cases}$$

Donc

$$U = \frac{1}{2}mgl.(\theta_1^2 + \theta_2^2) + \frac{1}{2}kl^2.(\theta_1 - \theta_2)^2 - 2mgl$$

Et la Lagrangien (à une constante près)

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}ml^2.\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right) - \frac{1}{2}mgl.(\theta_1^2 + \theta_2^2) - \frac{1}{2}kl^2.(\theta_1 - \theta_2)^2}$$

2. **Equations de Lagrange.**

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(ml^2.\dot{\theta}_1) - \left(-mgl.\theta_1 - kl^2.(\theta_1 - \theta_2)\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}(ml^2.\dot{\theta}_2) - \left(-mgl.\theta_2 - kl^2.(\theta_2 - \theta_1)\right) = 0 \end{cases}$$

D'où les équations du mouvement (système d'équations différentielles) suivantes :

$$\begin{cases} ml^2.\ddot{\theta}_1 + (mgl + kl^2)\theta_1 - kl^2\theta_2 = 0 \\ ml^2.\ddot{\theta}_2 + (mgl + kl^2)\theta_2 - kl^2\theta_1 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \boxed{\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \left(\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{m}\right)\theta_1 - \dfrac{k}{m}\theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \left(\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{m}\right)\theta_2 - \dfrac{k}{m}\theta_1 = 0 \end{cases}}$$

3. **Pulsations propres.**

En posant les solutions de la forme :

$$\theta_1 = A_1.\sin(\omega t + \varphi) \quad ; \quad \theta_2 = A_2.\sin(\omega t + \varphi)$$
$$\ddot{\theta}_1 = -\omega^2.A_1.\sin(\omega t + \varphi) \quad ; \quad \ddot{\theta}_2 = -\omega^2.A_2.\sin(\omega t + \varphi)$$

D'où le système d'équations différentielles se ramène a un *système d'équations linéaires*

$$\begin{cases} \left(\left(\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{m}\right) - \omega^2\right)A_1 - \dfrac{k}{m}A_2 = 0 \\ -\dfrac{k}{m}A_1 + \left(\left(\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{m}\right) - \omega^2\right)A_2 = 0 \end{cases}$$

Le système d'équations linéaires étant sans second membre, le déterminant doit être nulle pour que les solutions ne soient pas triviales (égales à 0).

$$\begin{vmatrix} (g/l+k/m)-\omega^2 & -k/m \\ -k/m & (g/l+k/m)-\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

D'où l'équation caractéristique

$$\left(\left(\frac{g}{l}+\frac{k}{m}\right)-\omega^2\right)^2-\left(\frac{k}{m}\right)^2=0$$

Ou

$$\left(\frac{g}{l}+\frac{k}{m}\right)-\omega^2=\pm\frac{k}{m}$$

C'est une équation du deuxième ordre d'inconnue ω^2, dont les solutions sont :

$$\boxed{\omega^2_{\text{Fondamentale}}=\frac{g}{l}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\omega^2_{\text{Harmonique}}=\frac{g}{l}+2\frac{k}{m}}$$

4. Forme générale des solutions.

Pour $\omega=\omega_{\text{Fondamentale}}$ (en remplaçant dans le système d'équations linéaires)

$$\frac{k}{m}A_1-\frac{k}{m}A_2=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_2=A_1}$$

Pour $\omega=\omega_{\text{Harmonique}}$ (en remplaçant dans le système d'équations linéaires)

$$-\frac{k}{m}A_1-\frac{k}{m}A_2=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_2=-A_1}$$

D'où la forme générale des solutions :

$$\boxed{\begin{cases}\theta_1(t)=A_{\text{F}}.\sin(\omega_{\text{F}}t+\varphi_{\text{F}})+A_{\text{H}}.\sin(\omega_{\text{H}}t+\varphi_{\text{H}})\\ \theta_2(t)=A_{\text{F}}.\sin(\omega_{\text{F}}t+\varphi_{\text{F}})-A_{\text{H}}.\sin(\omega_{\text{H}}t+\varphi_{\text{H}})\end{cases}}$$

Tel que : A_{H}, A_{F}, φ_{H}, φ_{F} sont des constantes d'intégrations, elles sont déterminées à partir des conditions initiales sur les positions $\theta_1(0)$, $\theta_2(0)$ et les vitesses $\dot{\theta}_1(0)$, $\dot{\theta}_2(0)$.

On pose $\theta_1=q_1+q_2$ et $\theta_2=q_1-q_2$. Donc $\ddot{\theta}_1=\ddot{q}_1+\ddot{q}_2$ et $\ddot{\theta}_2=\ddot{q}_1-\ddot{q}_2$.

$$\begin{cases}\ddot{q}_1+\ddot{q}_2+\left(\frac{g}{l}\right)q_1+\left(\frac{g}{l}+2\frac{k}{m}\right)q_2=0\\ \ddot{q}_1-\ddot{q}_2+\left(\frac{g}{l}\right)q_1-\left(\frac{g}{l}+2\frac{k}{m}\right)q_2=0\end{cases}$$

En faisant la **somme** des deux équations nous avons

$$\boxed{\ddot{q}_1+\left(\frac{g}{l}\right)q_1=0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

En faisant la **différence** des deux équations nous avons

$$\boxed{\ddot{q}_2+\left(\frac{g}{l}+2\frac{k}{m}\right)q_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_2=\sqrt{\frac{g}{l}+2\frac{k}{m}}}$$

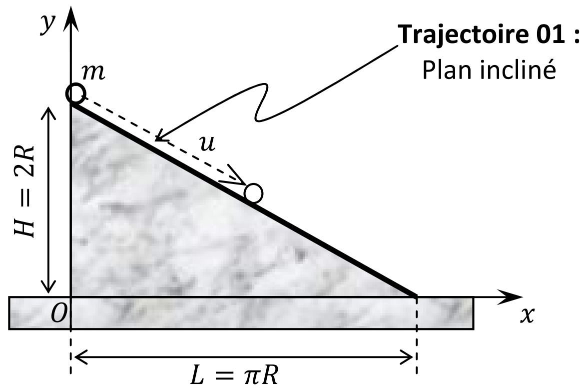
On retrouve alors $\omega_{\text{Fondamentale}}$ et $\omega_{\text{Harmonique}}$.

EXERCICE 02: (10 points)

Trajectoire 01 :

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{u}^2$$



Energie potentielle

$$U = mgh = -mgu.\sin\alpha$$

Avec

$$\sin\alpha = \frac{H}{\sqrt{H^2+L^2}} = \frac{2}{\sqrt{4+\pi^2}}$$

Lagrangien

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + mgu.\sin\alpha$$

Moment conjugué (impulsion généralisée)

$$p_u = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{u}} = m\dot{u} \quad \Rightarrow \quad \dot{u} = \frac{p_u}{m}$$

1. Hamiltonien

$$\boxed{\mathcal{H} = p_u\dot{u} - \mathcal{L} = T + U = \frac{1}{2}\frac{p_u^2}{m} - mgu.\sin\alpha}$$

Equations de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{u} = \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_u} = \dfrac{p_u}{m} \\ \dot{p}_u = -\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial u} = mg\sin\alpha \end{cases}$$

Equation du mouvement (on dérive la première équation et on remplace par la seconde)

$$\boxed{\ddot{u} = \frac{\dot{p}_u}{m} = g\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+\pi^2}}g}$$

2. Equation horaire (en intégrant deux fois)

$$u(t) = \frac{1}{2}g\sin\alpha\,.t^2 + \dot{u}_0.t + u_0$$

Conditions initiales $\dot{u}_0 = 0$ et $u_0 = 0$.

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{2}g\sin\alpha\,.t^2 = \frac{1}{\sqrt{4+\pi^2}}g.t^2}$$

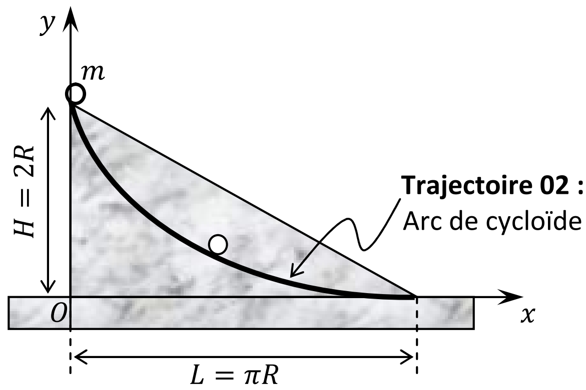
Et les équations $x(t)$ et $y(t)$ suivant les axes (Ox) et (Oy).

$$\begin{cases} x(t) = u(t).\cos\alpha \\ y(t) = 2R - u(t).\sin\alpha \end{cases} \quad avec \quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}} \\ \sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{4+\pi^2}} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} x(t) = \dfrac{\pi}{4+\pi^2}g.t^2 \\ y(t) = 2R - \dfrac{2}{4+\pi^2}g.t^2 \end{cases}}$$

3. Temps de descente : en bas du plan incliné $u(t_1) = R\sqrt{4+\pi^2}$ (ou $x(t_1) = \pi R$ ou $y(t_1) = 0$).

$$R\sqrt{4+\pi^2} = \frac{1}{\sqrt{4+\pi^2}}g.t_1^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_1 = \sqrt{4+\pi^2}\sqrt{R/g}}$$

Trajectoire 02 :



4. Energie cinétique

$$\begin{cases} x = R.\phi - R.\sin\phi \\ y = R + R.\cos\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^\bullet = R\phi^\bullet - R\phi^\bullet\cos\phi \\ y^\bullet = -R\phi^\bullet\sin\phi \end{cases}$$

Donc

$$v^2 = x^{\bullet 2} + y^{\bullet 2} = 2R^2\phi^{\bullet 2}(1-\cos\phi)$$

Et

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = mR^2\phi^{\bullet 2}(1-\cos\phi)$$

Energie potentielle

$$U = mgh = mgy = mgR(1+\cos\phi)$$

Lagrangien

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = mR^2\phi^{\bullet 2}(1-\cos\phi) - mgR(1+\cos\phi)}$$

5. Le vecteur position et l'énergie potentielle ne dépendent pas explicitement du temps, donc :

$$\mathcal{H} = T + U = E_m$$

Le Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps $\partial\mathcal{L}/\partial t = 0$, donc :

$$\mathcal{H} = \text{constante}$$

D'où

$$E_m = T + U = \text{constante}$$

6. Conservation de l'énergie mécanique totale

$$T + U = mR^2\phi^{\bullet 2}(1-\cos\phi) + mgR(1+\cos\phi) = \text{constante}$$

En utilisant les conditions initiales ($\phi(0) = 0,\ \phi^\bullet(0) = 0$) : $2mgR = \text{constante}$

En remplaçant dans l'équation de conservation

$$mR^2\phi^{\bullet 2}(1-\cos\phi) = mgR(1-\cos\phi)$$

Donc

$$\boxed{\phi^\bullet = \sqrt{g/R} = \text{constante}}$$

7. Equation horaire (on intègre $\phi^\bullet$)

$$\phi(t) = \sqrt{g/R}\,.t + \phi(0)$$

Comme $\phi(0) = 0$

$$\boxed{\phi(t) = \sqrt{g/R}\,.t}$$

Et les équations $x(t)$ et $y(t)$ suivant les axes (Ox) et (Oy).

$$\begin{cases} x = R.\phi - R.\sin\phi \\ y = R + R.\cos\phi \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x(t) = \sqrt{gR}.t - R.\sin\left(\sqrt{g/R}\,.t\right) \\ y(t) = R + R.\cos\left(\sqrt{g/R}\,.t\right) \end{cases}}$$

8. Temps de descente : en bas du plan incliné $\phi(t_2) = \pi$ (ou $x(t_2) = \pi R$ ou $y(t_2) = 0$).

$$\pi = \sqrt{g/R}\,.t_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_2 = \pi.\sqrt{R/g}}$$

9. Comparaison

$$t_2 = 3{,}1415.\sqrt{R/g} \quad \text{et} \quad t_1 = 3{,}7241.\sqrt{R/g} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_2 < t_1}$$

Bien que la deuxième trajectoire soit plus longue que la droite le point matériel (bille) la parcourt plus rapidement.