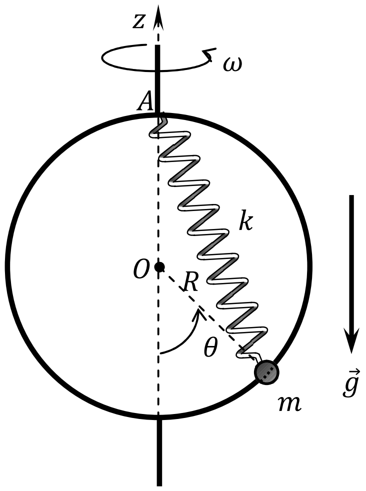
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

EXERCICE 01: (10 points)



1. Ecrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du système.

Point matériel dans l'espace : 03 degrés de liberté.

Contraintes : 02 contraintes.

La bille se déplace dans un cerceau $r = R = \text{constante}$.

Le cerceau tourne avec une vitesse angulaire constante

$\varphi^{\bullet} = \omega = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \omega t.$

03 degrés de liberté – 02 contraintes $\Rightarrow$ $\boxed{\text{un (01) seul degré de liberté}}$.

Coordonnée généralisée : variable θ (coordonnées sphériques).

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{et} \qquad U = mgh + \frac{1}{2}k.(\Delta l)^2$$

Avec

$$\vec{v} = r^{\bullet}\vec{e}_r + r\theta^{\bullet}\vec{e}_\theta + r.\sin\theta\,\varphi^{\bullet}\vec{e}_\varphi = R\theta^{\bullet}\vec{e}_\theta + R\omega.\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \quad \Rightarrow \quad v^2 = R^2\theta^{\bullet 2} + R^2\omega^2.\sin^2\theta$$

$$h = -R.\cos\theta$$

$$\Delta l = l - l_0 = l \quad \Rightarrow \quad (\Delta l)^2 = l^2 = (R + R.\cos\theta)^2 + (R.\sin\theta)^2 = 2R^2.(1+\cos\theta)$$

(Origine des énergies potentielle passant par O le centre du cerceau)

Donc

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2\theta^{\bullet 2} + \frac{1}{2}mR^2\omega^2.\sin^2\theta + mgR.\cos\theta - kR^2.(1+\cos\theta)}$$

2. Equation d'Euler-Lagrange du système.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta^{\bullet}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$$

Avec

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta^{\bullet}} = mR^2.\theta^{\bullet} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta^{\bullet}}\right) = mR^2.\theta^{\bullet\bullet}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = mR^2\omega^2.\sin\theta\cos\theta - (mg - kR)R.\sin\theta$$

En remplaçant

$$mR^2.\theta^{\bullet\bullet} - mR^2\omega^2.\sin\theta\cos\theta + (mg - kR)R.\sin\theta = 0$$

D'où l'équation du mouvement

$$\boxed{\theta^{\bullet\bullet} - \omega^2.\sin\theta\cos\theta + \left(\frac{g}{R} - \frac{k}{m}\right)\sin\theta = 0}$$

3. Positions d'équilibre $\left(\boldsymbol{\theta}^{\bullet\bullet}_{\text{équilibre}} = \mathbf{0}\right)$.

D'après l'équation du mouvement

$$\omega^2 . \sin\theta_{\text{éq}} \cos\theta_{\text{éq}} + \left(\frac{g}{R} - \frac{k}{m}\right) \sin\theta_{\text{éq}} = 0 \quad \text{ou} \quad \boxed{\sin\theta_{\text{éq}} . \left(\cos\theta_{\text{éq}} + \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{g}{R} - \frac{k}{m}\right)\right) = 0}$$

Les positions d'équilibre triviales :

$$\sin\theta_{\text{éq}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{\text{éq}} = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{\theta_{\text{éq}} = \pi}$$

Correspondent réciproquement, au point le plus haut et au point le plus bas du cerceau.

La position d'équilibre non triviale :

$$\cos\theta_{\text{éq}} = -\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{g}{R} - \frac{k}{m}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{\text{éq}} = \arccos\left(-\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{g}{R} - \frac{k}{m}\right)\right)}$$

Puisque $-1 \leq \cos\theta_{\text{éq}} \leq +1$ cette position ne peut être obtenue que pour

$$\omega^2 \geq \left|\frac{g}{R} - \frac{k}{m}\right|$$

4. Condition d'un mouvement oscillatoire.

Comme $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$, l'équation différentielle peut être écrite :

$$\theta^{\bullet\bullet} - \frac{1}{2}\omega^2 . \sin 2\theta + \left(\frac{g}{R} - \frac{k}{m}\right) \sin\theta = 0$$

Au voisinage de $\theta = 0$: $\sin\theta \approx \theta$ et $\sin 2\theta \approx 2\theta$

L'équation du mouvement devient :

$$\theta^{\bullet\bullet} + \left(\frac{g}{R} - \frac{k}{m} - \omega^2\right)\theta = 0$$

D'où la condition du mouvement oscillatoire

$$\boxed{\frac{g}{R} - \frac{k}{m} - \omega^2 > 0}$$

5. La pulsation des oscillations libre.

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R} - \frac{k}{m} - \omega^2}}$$

Et la période des petites oscillations libres

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{mR}{mg - kR - mR - \omega^2}}}$$

6. Formalisme de Hamilton.

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^\bullet} = mR^2.\theta^\bullet \qquad \text{et} \qquad \theta^\bullet = \frac{p_\theta}{mR^2}$$

$$\mathcal{H}(\theta, p_\theta, t) = p_\theta \theta^\bullet - \mathcal{L}$$

En remplaçant

$$\mathcal{H}(\theta, p_\theta, t) = \frac{p_\theta^2}{mR^2} - \left(\frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{mR^2} + \frac{1}{2}mR^2\omega^2.\sin^2\theta + mgR.\cos\theta - kR^2.(1+\cos\theta)\right)$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{H}(\theta, p_\theta) = \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{mR^2} - \frac{1}{2}mR^2\omega^2.\sin^2\theta - mgR.\cos\theta + kR^2.(1+\cos\theta)}$$

7. Les équations de Hamilton

$$\begin{cases} \theta^\bullet = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \dfrac{p_\theta}{mR^2} \\ p_\theta^\bullet = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = mR^2\omega^2.\sin\theta\cos\theta - mgR.\sin\theta + kR^2.\sin\theta \end{cases}$$

En dérivant la première équation

$$\theta^{\bullet\bullet} = \frac{p_\theta^\bullet}{mR^2}$$

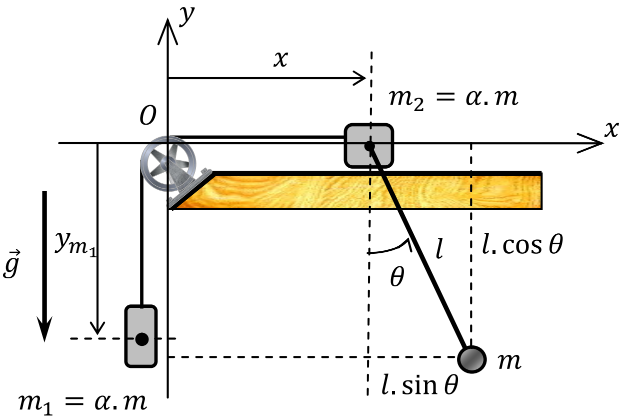
Et en remplaçant par la deuxième équation

$$\boxed{\theta^{\bullet\bullet} = \omega^2.\sin\theta\cos\theta - \left(\frac{g}{R} - \frac{k}{m}\right)\sin\theta}$$

Qui est l'équation différentielle du mouvement retrouvée précédemment.

EXERCICE 02: (10 points)

1. Ecrire la vitesse $\vec{v}_m$ de la masse m.



$$\begin{cases} x_m = x + l.\sin\theta \\ y_m = -l.\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_m^{\bullet} = x^{\bullet} + l\theta^{\bullet}.\cos\theta \\ y_m^{\bullet} = +l\theta^{\bullet}.\sin\theta \end{cases}$$

Donc

$$\boxed{\vec{v}_m = (x^{\bullet} + l\theta^{\bullet}.\cos\theta)\vec{e}_x + (l\theta^{\bullet}.\sin\theta)\vec{e}_y}$$

Et son module

$$v_m = \sqrt{(x^{\bullet} + l\theta^{\bullet}.\cos\theta)^2 + (l\theta^{\bullet}.\sin\theta)^2}$$

D'où

$$v_m = \sqrt{x^{\bullet 2} + l^2\theta^{\bullet 2} + 2l\theta^{\bullet}x^{\bullet}\cos\theta}$$

En faisant l'approximation $\cos\theta \approx 1$ dans le cas des petites oscillations.

$$\boxed{v_m \approx \sqrt{x^{\bullet 2} + l^2\theta^{\bullet 2} + 2l\theta^{\bullet}x^{\bullet}} = x^{\bullet} + l\theta^{\bullet}}$$

2. Ecrire le Lagrangien $\mathcal{L}$ du système.

$$T = \frac{1}{2}m.v_m^2 + \frac{1}{2}m_1.v_{m_1}^2 + \frac{1}{2}m_2.v_{m_2}^2 \qquad \text{et} \qquad U = mgh_m + m_1gh_{m_1} + m_2gh_{m_2}$$

Avec $\left(-y_{m_1} + x = L = \text{constante}\right)$ fil inextensible. Donc

$$\begin{cases} v_{m_1} = x^{\bullet} \\ v_{m_2} = y_{m_1}^{\bullet} = x^{\bullet} \end{cases} ; \quad \begin{cases} h_{m_1} = 0 \\ h_{m_2} = y_{m_1} = x - L \end{cases} \quad \text{et} \quad h_m = y_m = -l.\cos\theta$$

En remplaçant

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m.(x^{\bullet} + l\theta^{\bullet})^2 + \frac{1}{2}m_1.x^{\bullet 2} + \frac{1}{2}m_2.x^{\bullet 2} + mgl.\cos\theta - m_1gx + m_1gL$$

En omettant la constante et en utilisant $(m_1 = m_2 = \alpha.m)$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(x^{\bullet} + l\theta^{\bullet})^2 + \alpha m.x^{\bullet 2} + mgl.\cos\theta - \alpha mg.x}$$

3. Ecrire les équations de Lagrange du système.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^{\bullet}}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta^{\bullet}}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left((m + 2\alpha m).x^{\bullet} + ml\theta^{\bullet}\right) - (-\alpha mg) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}(ml^2.\theta^{\bullet} + ml.x^{\bullet}) - (-mgl.\sin\theta) = 0 \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} (m + 2\alpha m).x^{\bullet\bullet} + ml\theta^{\bullet\bullet} + \alpha mg = 0 \\ ml^2.\theta^{\bullet\bullet} + ml.x^{\bullet\bullet} + mgl.\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Dans l'approximation des petits angles $(\sin\theta \approx \theta)$

$$\begin{cases} (m + 2\alpha m).x^{\bullet\bullet} + ml\theta^{\bullet\bullet} + \alpha mg = 0 \\ ml^2.\theta^{\bullet\bullet} + ml.x^{\bullet\bullet} + mgl.\theta = 0 \end{cases}$$

Ou

$$\boxed{\begin{cases} (1 + 2\alpha).x^{\bullet\bullet} + l\theta^{\bullet\bullet} + \alpha g = 0 \\ l.\theta^{\bullet\bullet} + x^{\bullet\bullet} + g.\theta = 0 \end{cases}}$$

4. Equation différentielle du mouvement en $\boldsymbol{\theta}$.

D'après la première équation

$$(1+2\alpha).x^{\bullet\bullet}+l\theta^{\bullet\bullet}+\alpha g=0$$

$$x^{\bullet\bullet}=-\frac{l}{1+2\alpha}\theta^{\bullet\bullet}-\frac{\alpha}{1+2\alpha}g$$

En remplaçant dans la seconde équation

$$l.\theta^{\bullet\bullet}+\left(-\frac{l}{1+2\alpha}\theta^{\bullet\bullet}-\frac{\alpha}{1+2\alpha}g\right)+g.\theta=0$$

$$\frac{2\alpha l}{1+2\alpha}\theta^{\bullet\bullet}+g.\theta-\frac{\alpha}{1+2\alpha}g=0$$

Et donc

$$\boxed{\theta^{\bullet\bullet}+\left(\frac{1}{2\alpha}+1\right)\frac{g}{l}\theta-\frac{1}{2}\frac{g}{l}=0}$$

5. Equation horaire du mouvement du pendule $\boldsymbol{\theta(t)}$.

Solution homogène

$$\theta^{\bullet\bullet}+\left(\frac{1}{2\alpha}+1\right)\frac{g}{l}\theta=0$$

$$\theta_h=A.\sin(\omega_0 t+\varphi)\qquad \text{avec}\qquad \omega_0=\sqrt{\left(\frac{1}{2\alpha}+1\right)\frac{g}{l}}$$

Solution particulière : $\theta_p=\text{constante}\ \left(\theta_p^{\bullet\bullet}=0\right)$.

$$\left(\frac{1}{2\alpha}+1\right)\frac{g}{l}\theta_p-\frac{1}{2}\frac{g}{l}=0\qquad\Rightarrow\qquad\theta_p=\frac{\alpha}{1+2\alpha}$$

D'où la solution générale

$$\boxed{\theta(t)=\theta_h+\theta_p=A.\sin(\omega_0 t+\varphi)+\frac{\alpha}{1+2\alpha}}$$

Pour un système initialement au repos (sans vitesse initiale)

$$\theta^{\bullet}(t=0)=A\omega_0.\cos(\varphi)=0\qquad\Rightarrow\qquad\varphi=\pm\pi/2$$

$$\theta(0)=\theta_0=A.\sin(\pm\pi/2)\qquad\Rightarrow\qquad A=\pm\theta_0$$

Finalement

$$\boxed{\theta(t)=\theta_0.\sin\left(\omega_0 t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\alpha}{1+2\alpha}}$$

6. Les équations horaires du mouvement.

Pour $\alpha\gg1$ nous avons $\theta_p\approx 0{,}5\,rad\approx 28\,°$. Donc, nous ne pouvons plus faire l'approximation des petits angles.

$$v_m=\sqrt{x^{\bullet 2}+l^2\theta^{\bullet 2}+2l\theta^{\bullet}x^{\bullet}\cos\theta}$$

Et

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\left(x^{\bullet 2}+l^2\theta^{\bullet 2}+2l\theta^{\bullet}x^{\bullet}\cos\theta\right)+\alpha m.x^{\bullet 2}+mgl.\cos\theta-\alpha mg.x$$

Et les équations de Lagrange donnent :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^{\bullet}}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial \theta^{\bullet}}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\big((m+2\alpha m).x^{\bullet} + ml\theta^{\bullet}.\cos\theta\big) - (-\alpha mg) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}(ml^2.\theta^{\bullet} + ml.x^{\bullet}.\cos\theta) - (ml\theta^{\bullet}x^{\bullet}.\sin\theta - mgl.\sin\theta) = 0 \end{cases}$$

Et

$$\boxed{\begin{cases} (1+2\alpha).x^{\bullet\bullet} + l\theta^{\bullet\bullet}.\cos\theta + l\theta^{\bullet 2}.\sin\theta + \alpha g = 0 \\ l.\theta^{\bullet\bullet} + x^{\bullet\bullet}.\cos\theta + g.\sin\theta = 0 \end{cases}}$$