FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

MODULE : RELATIVITÉ RESTREINTE.

EXERCICE 01: (07 *points*)

Linéarité : La transformation da Lorentz est une transformation linéaire.

$$\begin{cases} x = k.x' + l.ct' \\ ct = m.x' + n.ct' \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Pour trouver la transformation de Lorentz il faut trouver les facteurs : k, l, m, n.

1. *Réciprocité*

Si nous nous plaçons à l'origine O' nous aurons $x' = 0$ et $x = v_e.t$ car l'origine O' se déplace à une vitesse v_e par rapport au référentiel lié à l'origine O. Ce qui donne :

$$\begin{cases} v_e.t = l.ct' \quad \dots\dots\dots \quad (1) \\ ct = n.ct' \quad \dots\dots\dots \quad (2) \end{cases}$$

En divisant les deux équations nous trouvons $l = \beta_e.n$

D'autre part, si nous nous plaçons à l'origine O nous aurons $x = 0$ et $x' = -v_e.t'$ car l'origine O se déplace à une vitesse $-v_e$ par rapport au référentiel lié à O'. Ce qui donne :

$$\begin{cases} k.v_e.t' = l.ct' \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3) \\ ct = -m.v_e.t' + n.ct' \quad \dots\dots\dots \quad (4) \end{cases}$$

De l'équation (3) nous avons $l = \beta_e.k$ ou $k = n$

Donc les équations de la transformation s'écrivent

$$\begin{cases} x = k.(x' + \beta_e.ct') \\ ct = m.x' + k.ct' \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Invariance de la vitesse de la lumière

Un rayon lumineux se propage du point O au point M avec une vitesse c. L'équation donnant le déplacement du front d'onde du rayon est

$$r = ct \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \quad \dots\dots\dots \quad (5)$$

De la même manière, le même rayon se propage du point O' au point M avec la même vitesse c. Ici nous avons considéré que le rayon est émis à l'instant initial $(t_0 = t'_0 = 0)$ alors que les deux origines O et O' coïncident. Dans ce cas, l'équation de déplacement du front d'onde est donnée par

$$r' = ct' \qquad \text{ou} \qquad {x'}^2 + {y'}^2 + {z'}^2 = c^2{t'}^2 \quad \dots\dots\dots \quad (6)$$

En remplaçant x et ct trouvés précédemment dans l'équation (5) nous trouvons.

$$(k^2 - m^2)\,{x'}^2 + y^2 + z^2 + 2k(k\beta_e - m).x'.ct' = k^2(1-\beta_e^2).c^2{t'}^2$$

En comparant avec l'équation (6) avec $y = y'$ et $z = z'$ il vient que

$$(k^2 - m^2) = 1 \quad ; \quad k^2(1-\beta_e^2) = 1 \quad ; \quad 2k(k\beta_e - m) = 0$$

Et donc

$$\boxed{k = (1-\beta_e^2)^{-1/2} = \gamma_e} \qquad \text{et} \qquad \boxed{m = k\beta_e = \gamma_e\beta_e}$$

Avec

$$\boxed{l = k\beta_e = \gamma_e\beta_e} \qquad \text{et} \qquad \boxed{n = k = \gamma_e}$$

D'où la transformation de Lorentz

$$\boxed{\begin{cases} x = \gamma_e(x' + \beta_e . ct') \\ ct = \gamma_e(\beta_e . x' + ct') \end{cases}} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

2. Invariance

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

En remplaçant x, y, z et ct par la transformation de Lorentz, nous avons

$$s^2 = \gamma_e^2(1 - \beta_e^2). c^2t'^2 - \gamma_e^2(1 - \beta_e^2)\, x'^2 - y'^2 - z'^2$$

Ce qui donne

$$s^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = s'^2$$

3. Forme hyperbolique

La rapidité est donnée par

$$r_e = \operatorname{arctanh} \beta_e \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\beta_e = \tanh r_e}$$

Donc

$$\gamma_e = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_e^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 r_e}}$$

Comme

$$1 - \tanh^2 r_e = 1 - \frac{\sinh^2 r_e}{\cosh^2 r_e} = \frac{\cosh^2 r_e - \sinh^2 r_e}{\cosh^2 r_e} = \frac{1}{\cosh^2 r_e}$$

D'où

$$\boxed{\gamma_e = \cosh r_e}$$

La transformation de Lorentz s'écrit alors sous la forme.

$$\begin{cases} x = \cosh r_e\, (x' + \tanh r_e \, . \, ct') \\ ct = \cosh r_e\, (\tanh r_e \, . \, x' + ct') \end{cases}$$

Comme

$$\cosh r_e \, . \tanh r_e = \sinh r_e$$

Nous obtenons la forme hyperbolique de la transformation de Lorentz.

$$\boxed{\begin{cases} x = \cosh r_e \, . \, x' + \sinh r_e \, . \, ct' \\ ct = \sinh r_e \, . \, x' + \cosh r_e \, . \, ct' \end{cases}}$$

EXERCICE 02: (07 *points*)

1. **Coordonnées des événements.** La transformation de Lorentz donne

$$\begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta.x') \\ x = \gamma(\beta.ct' + x') \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \beta = \frac{v}{c} \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

E_1 = « L'avant du train entre dans le tunnel ».

L'avant du train se trouve à une distance l devant le point O' dans le référentiel $\mathcal{R}'$, donc : $x_1' = l$.
L'entrée du tunnel coïncide avec le point O dans le référentiel $\mathcal{R}$, donc : $x_1 = 0$
En utilisant la transformation de Lorentz

$$\begin{cases} ct_1 = \gamma.(ct_1' + \beta.l) \\ 0 = \gamma.(\beta.ct_1' + l) \end{cases} \Rightarrow \qquad ct_1' = -\frac{1}{\beta}l \qquad \text{et} \qquad ct_1 = \gamma.\left(\frac{\beta^2-1}{\beta}\right)l = -\frac{1}{\gamma\beta}l$$

D'où

$$\boxed{E_1 = \begin{pmatrix} ct_1 = -(1/\gamma\beta)l \\ x_1 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}} \quad ; \quad \boxed{E_1 = \begin{pmatrix} ct_1' = -(1/\beta)l \\ x_1' = l \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}}$$

E_2 = « L'arrière du train entre dans le tunnel ».

L'arrière du train coïncide avec le point O' dans le référentiel $\mathcal{R}'$, donc : $x_2' = 0$.
L'entrée du tunnel coïncide avec le point O dans le référentiel $\mathcal{R}$, donc : $x_2 = 0$
En utilisant la transformation de Lorentz

$$\begin{cases} ct_2 = \gamma.(ct_2' + \beta.0) \\ 0 = \gamma.(\beta.ct_2' + 0) \end{cases} \Rightarrow \qquad ct_2' = 0 \qquad \text{et} \qquad ct_2 = 0$$

D'où

$$\boxed{E_2 = \begin{pmatrix} ct_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}} \quad ; \quad \boxed{E_2 = \begin{pmatrix} ct_2' = 0 \\ x_2' = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}}$$

E_3 = « L'avant du train sort du tunnel ».

L'avant du train se trouve à une distance l devant le point O' dans le référentiel $\mathcal{R}'$, donc : $x_3' = l$.
La sortie du tunnel se trouve à une distance αl devant le point O dans le référentiel $\mathcal{R}$, donc : $x_3 = \alpha l$.
En utilisant la transformation de Lorentz

$$\begin{cases} ct_3 = \gamma.(ct_3' + \beta.l) \\ \alpha l = \gamma.(\beta.ct_3' + l) \end{cases} \Rightarrow \quad ct_3' = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\gamma} - 1\right)l = \frac{\alpha-\gamma}{\gamma\beta}l \qquad \text{et} \qquad ct_3 = \gamma.\left(\frac{\alpha-\gamma}{\gamma\beta} + \beta\right)l = \frac{\gamma\alpha - 1}{\gamma\beta}l$$

D'où

$$\boxed{E_3 = \begin{pmatrix} ct_3 = \dfrac{\gamma\alpha-1}{\gamma\beta}l \\ x_3 = \alpha l \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}} \quad ; \quad \boxed{E_3 = \begin{pmatrix} ct_3' = \dfrac{\alpha-\gamma}{\gamma\beta}l \\ x_3' = l \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}}$$

E_4 = « L'arrière du train sort du tunnel ».

L'arrière du train coïncide avec le point O' dans le référentiel $\mathcal{R}'$, donc : $x_4' = 0$.
La sortie du tunnel se trouve à une distance αl devant le point O dans le référentiel $\mathcal{R}$, donc : $x_4 = \alpha l$.
En utilisant la transformation de Lorentz

$$\begin{cases} ct_4 = \gamma.(ct_4' + \beta.0) \\ \alpha l = \gamma.(\beta.ct_4' + 0) \end{cases} \Rightarrow \qquad ct_4' = \frac{\alpha}{\gamma\beta}l \qquad \text{et} \qquad ct_4 = \frac{\alpha}{\beta}l$$

D'où

$$\boxed{E_4 = \begin{pmatrix} ct_4 = (\alpha/\beta)l \\ x_4 = \alpha l \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}} \quad ; \quad \boxed{E_4 = \begin{pmatrix} ct_4' = (\alpha/\gamma\beta)l \\ x_4' = l \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}}$$

2. E_2 et E_3 sont simultanés dans $\mathcal{R}$.

$$ct_2 = ct_3 \qquad \Rightarrow \qquad 0 = \frac{\gamma\alpha - 1}{\gamma\beta} l \qquad \text{et} \qquad \boxed{\alpha = \frac{1}{\gamma}}$$

3. E_2 et E_3 sont simultanés dans $\mathcal{R}'$.

$$ct'_2 = ct'_3 \qquad \Rightarrow \qquad 0 = \frac{\alpha - \gamma}{\gamma\beta} l \qquad \text{et} \qquad \boxed{\alpha = \gamma}$$

4. Explication.

Longueur du train dans le référentiel $\mathcal{R}'$: $l_{\text{propre train}} = l$.
Longueur du train dans le référentiel $\mathcal{R}$: $l_{\text{impropre train}} = \frac{1}{\gamma} l_{\text{propre train}} = \frac{1}{\gamma} l$.
Longueur du tunnel dans le référentiel $\mathcal{R}$: $l_{\text{propre tunnel}} = \alpha l$.
Longueur du train dans le référentiel $\mathcal{R}'$: $l_{\text{impropre tunnel}} = \frac{1}{\gamma} l_{\text{propre tunnel}} = \frac{\alpha}{\gamma} l$.

Pour que les événements E_2 et E_3 soient simultanés dans $\mathcal{R}$, il faut que l'arrière du train entre dans le tunnel en *même temps* que l'avant du train sort du tunnel, pour un observateur lié à $\mathcal{R}$.
Autrement dit le train et le tunnel doivent avoir la même longueur pour un observateur lié à $\mathcal{R}$.

$$l_{\text{impropre train}} = l_{\text{propre tunnel}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\gamma} l = \alpha l \qquad \text{et} \qquad \boxed{\alpha = \frac{1}{\gamma}}$$

Pour que les événements E_2 et E_3 soient simultanés dans $\mathcal{R}'$, il faut que l'arrière du train entre dans le tunnel en *même temps* que l'avant du train sort du tunnel, pour un observateur lié à $\mathcal{R}'$.
Autrement dit le train et le tunnel doivent avoir la même longueur pour un observateur lié à $\mathcal{R}'$.

$$l_{\text{propre train}} = l_{\text{impropre tunnel}} \qquad \Rightarrow \qquad l = \frac{\alpha}{\gamma} l \qquad \text{et} \qquad \boxed{\alpha = \gamma}$$

5. E_1 et E_2 simultanés dans $\mathcal{R}'$.

$$ct'_1 = ct'_2 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{\beta} l = 0$$

Impossible pour un train de longueur non nulle.

L'intervalle étant invariant

$${s'_{12}}^2 = (ct'_2 - ct'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 = \frac{1}{\beta^2} l^2 - l^2 = \frac{1}{\gamma^2\beta^2} l^2 = s_{12}^2 > 0 \qquad \text{genre temps}$$

Donc les deux événements ne peuvent être simultané par changement de référentiel (ni inversé chronologiquement)

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : RELATIVITÉ RESTREINTE.

Matricule :	Nom : Doe	Prénom : John	Groupe :

Questions de cours : (06 points)

Encercler la (les) lettre(s) correspondant à la bonne réponse :

1. Je me déplace en voiture sous la pluie avec une vitesse constante par rapport au sol et je remarque que les goutes de pluie décrivent une trajectoire rectiligne inclinée par rapport à ma voiture, alors que quand j'étais à l'arrêt leur trajectoire était verticale. J'en déduis que :
   a. La vitesse des gouttes de pluie est variable par rapport au sol.
   b. La vitesse des gouttes est variable par rapport à la voiture en déplacement.
   c. La vitesse des gouttes est constante dans les deux repères.

2. Etant donné un observateur A lié au référentiel du Soleil et un observateur B lié au référentiel terrestre. L'accélération de Coriolis :
   a. Apparait pour tous les corps en mouvements par rapport au référentiel du soleil.
   b. Apparait pour tous les corps en mouvements par rapport au référentiel de la terre.
   c. Elle est perpendiculaire à la direction de déplacement d'un corps.
   d. Elle est parallèle à la direction de déplacement d'un corps.

3. Parmi les équations suivantes, lesquels sont invariantes par rapport à la transformation de Galilée pour des référentiels galiléens ?
   a. Le théorème de Gauss.
   b. L'équation de Maxwell-Ampère.
   c. L'équation de Maxwell-Faraday.
   d. L'équation de Maxwell-Thomson.

4. Un homme court derrière un voleur en lui criant dessus. Mais le voleur, qui n'est autre que Mr. Doppler, remarque que la voix de l'homme est plus aigue comparée à sa voix normale (quand les deux hommes sont à l'arrêt) il en déduit que
   a. L'homme va le rattraper.
   b. L'homme ne pourra pas l'attraper.
   c. Que la distance entre lui et l'homme est constante.
   d. Les hommes ont une voix de femme quand ils courent.

5. Quelle expérience historique montre la dilatation des durées et la contraction des longueurs mesurées pour des référentiels en mouvement ?
   a. L'expérience de la roue dentée de Fizeau.
   b. L'expérience du miroir tournant de Foucault.
   c. L'expérience d'interférométrie de Michelson et Morley.
   d. L'expérience du mont Washington sur la désintégration des muons.

6. Le décalage entre la fréquence émise et la fréquence reçue pour un couple d'émetteur-récepteur en mouvement est donné dans le cas relativiste (effet Doppler-Fizeau longitudinal) par :
   a. $f_{\text{réc}} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} f_{\text{ém}}$
   b. $f_{\text{réc}} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f_{\text{ém}}$
   c. $f_{\text{réc}} = \frac{1-\beta}{\sqrt{1+\beta}} f_{\text{ém}}$
   d. $f_{\text{réc}} = \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta}} f_{\text{ém}}$