FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

MODULE : RELATIVITÉ RESTREINTE

DURÉE TOTALE : 60 minutes. **(Feuille 1/2)**

Nom et Prénom : John Doe	Signature :	Note : /20

Exercice 01 : Transformation de Lorentz-Poincaré (10 points)

On se propose d'établir la transformation de Lorentz-Poincaré entre les coordonnées (ct, x) d'un point matériel M dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}(Ox)$ et les coordonnées (ct', x') du même point matériel dans un référentiel $\mathcal{R}'(O'x')$ se déplaçant avec une vitesse uniforme $\vec{v} = v_e.\vec{e}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$. Pour se faire, nous utilisons les propriétés de cette transformation. La linéarité de la transformation impose d'écrire

$$\begin{cases} x = k.x' + l.ct' \\ ct = m.x' + n.ct' \end{cases}$$

Tel que k, l, m, n sont des constantes réelles.

1. En utilisant la réciprocité de la transformation ($\mathcal{R}$ se déplace avec une vitesse $-v_e.\vec{e}_x$ par rapport à $\mathcal{R}'$) et l'invariance de la vitesse de la lumière dans les deux référentiels, trouver les valeurs des constantes k, l, m, n en fonction de β_e tel que $\beta_e = v_e/c$.

Si nous nous plaçons à l'origine O' *nous aurons* $x' = 0$ *et* $x = v_e.t$

Ce qui donne $\begin{cases} v_e.t = l.ct' & \dots\dots\dots (1) \\ ct = n.ct' & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$

En divisant $(1)/(2)$ *nous obtenons* $\boxed{l = \beta_e.n}$

Si nous nous plaçons à l'origine O *nous aurons* $x = 0$ *et* $x' = -v_e.t'$

Ce qui donne $\begin{cases} k.v_e.t' = l.ct' & \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3) \\ ct = -m.v_e.t' + n.ct' & \dots\dots\dots (4) \end{cases}$

De l'équation (3) *nous avons* $\boxed{l = \beta_e.k}$ *et* $\boxed{k = n}$

Donc la transformation s'écrit $\begin{cases} x = k.(x' + \beta_e.ct') \\ ct = m.x' + k.ct' \end{cases}$

Invariance de la vitesse de la lumière dans $\mathcal{R}$ $x^2 = c^2t^2 \quad \dots\dots (5)$

Invariance de la vitesse de la lumière dans $\mathcal{R}'$ $x'^2 = c^2t'^2 \quad \dots\dots (6)$

En remplaçant x *et* ct *trouvés précédemment dans l'équation* (5)

$$(k^2 - m^2)\,x'^2 + 2k(k\beta_e - m).x'.ct' = k^2(1-\beta_e^2).c^2t'^2$$

En comparant avec l'équation (6) *il vient que*

$$(k^2 - m^2) = 1 \qquad 2k(k\beta_e - m) = 0 \qquad k^2(1-\beta_e^2) = 1$$

Donc

$$\boxed{k = (1-\beta_e^2)^{-1/2} = \gamma_e} \qquad \boxed{m = k\beta_e = \gamma_e\beta_e}$$

Et

$$\boxed{l = k\beta_e = \gamma_e\beta_e} \qquad \boxed{n = k = \gamma_e}$$

D'où la transformation de Lorentz

$$\boxed{\begin{cases} x = \gamma_e(x' + \beta_e . ct') \\ ct = \gamma_e(\beta_e . x' + ct') \end{cases}}$$

2. Montrer alors que la valeur $s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ est invariante par la transformation ainsi obtenue.

En remplaçant x, y, z *et* ct *par la transformation de Lorentz, nous avons (avec* $y = y'$ *et* $z = z'$*)*

$$s^2 = \gamma_e^2(1 - \beta_e^2). c^2{t'}^2 - \gamma_e^2(1 - \beta_e^2)\, {x'}^2 - {y'}^2 - {z'}^2$$

Ce qui donne

$$\boxed{s^2 = c^2{t'}^2 - {x'}^2 - {y'}^2 - {z'}^2 = {s'}^2}$$

D'où, la valeur $s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ *est invariante par la transformation de Lorentz-Poincaré*

3. En posant $\beta_e = \tanh r_e$ trouver la forme hyperbolique de la transformation de Lorentz-Poincaré.

La rapidité r_e *étant donnée par* $\beta_e = \tanh r_e$

Donc

$$\gamma_e = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_e^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 r_e}}$$

Comme

$$1 - \tanh^2 r_e = 1 - \frac{\sinh^2 r_e}{\cosh^2 r_e} = \frac{\cosh^2 r_e - \sinh^2 r_e}{\cosh^2 r_e} = \frac{1}{\cosh^2 r_e} \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_e = \cosh r_e$$

La transformation de Lorentz s'écrit alors sous la forme

$$\begin{cases} x = \cosh r_e\, (x' + \tanh r_e\, .\, ct') \\ ct = \cosh r_e\, (\tanh r_e\, .\, x' + ct') \end{cases}$$

Comme $\cosh r_e\, .\tanh r_e = \sinh r_e$

Nous obtenons la forme hyperbolique de la transformation de Lorentz

$$\boxed{\begin{cases} x = \cosh r_e\, .\, x' + \sinh r_e\, .\, ct' \\ ct = \sinh r_e\, .\, x' + \cosh r_e\, .\, ct' \end{cases}}$$

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE RATTRAPAGE

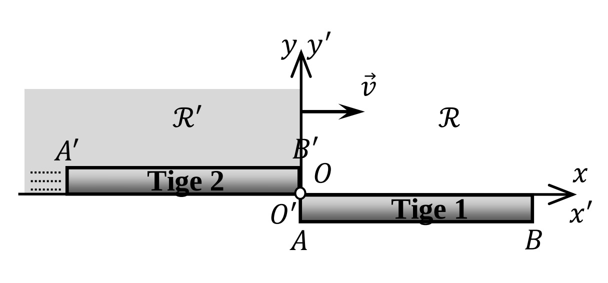
MODULE : RELATIVITÉ RESTREINTE

DURÉE TOTALE : 60 minutes. **(Feuille 2/2)**

Nom et Prénom : John Doe	Signature :

Exercice 02 : (10 points)

Considérons deux tiges AB et $A'B'$ ayant des *longueurs propres* $l_{\text{propre}} = L$ et $l'_{\text{propre}} = \alpha.L$. La tige $A'B'$ glisse sur la tige AB à une vitesse constante $\vec{v} = v.\vec{e}_x$. $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont les deux référentiels liés respectivement aux tiges AB et $A'B'$ comme le montre la figure ci-contre. Notons les événements suivants :
$E_0 =$ « A et B' coïncident », $E_1 =$ « A et A' coïncident », $E_2 =$ « B et B' coïncident », $E_3 =$ « B et A' coïncident ».



1. Ecrire, en fonction de β, γ et L, les coordonnées des événements E_0, E_1, E_2 et E_3 dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

Transformation de Lorentz $\begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta.x') \\ x = \gamma(\beta.ct' + x') \end{cases}$ et $\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta.x) \\ x' = \gamma(-\beta.ct + x) \end{cases}$

Evénement $E_0 =$ « A et B' coïncident » $x_0 = 0$ et $x'_0 = 0$

Donc $\begin{cases} ct_0 = \gamma(ct'_0 + \beta.0) \\ 0 = \gamma(\beta.ct'_0 + 0) \end{cases}$ et $\begin{cases} ct'_0 = \gamma(ct_0 - \beta.0) \\ 0 = \gamma(-\beta.ct_0 + 0) \end{cases}$

Ce qui donne $\boxed{E_0 \begin{pmatrix} ct_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}}$ et $\boxed{E_0 \begin{pmatrix} ct'_0 = 0 \\ x'_0 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}}$

Evénement $E_1 =$ « A et A' coïncident » $x_1 = 0$ et $x'_1 = -\alpha.L$

Donc $\begin{cases} ct_1 = \gamma(ct'_1 - \beta\alpha L) \\ 0 = \gamma(\beta.ct'_1 - \alpha L) \end{cases}$ et $\begin{cases} ct'_1 = \gamma(ct_1 - \beta.0) \\ -\alpha L = \gamma(-\beta.ct_1 + 0) \end{cases}$

Ce qui donne $\boxed{E_1 \begin{pmatrix} ct_1 = \alpha L/\gamma\beta \\ x_1 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}}$ et $\boxed{E_1 \begin{pmatrix} ct'_1 = \alpha L/\beta \\ x'_1 = -\alpha L \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}}$

Evénement $E_2 =$ « B et B' coïncident » $x_2 = L$ et $x'_2 = 0$

Donc $\begin{cases} ct_2 = \gamma(ct'_2 + \beta.0) \\ L = \gamma(\beta.ct'_2 + 0) \end{cases}$ et $\begin{cases} ct'_2 = \gamma(ct_2 - \beta.L) \\ 0 = \gamma(-\beta.ct_2 + L) \end{cases}$

Ce qui donne $\boxed{E_2 \begin{pmatrix} ct_2 = L/\beta \\ x_2 = L \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}}$ et $\boxed{E_2 \begin{pmatrix} ct'_2 = L/\gamma\beta \\ x'_2 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}}$

Evénement $E_3 =$ « B et A' coïncident » $x_3 = L$ et $x'_3 = -\alpha.L$

Donc $\begin{cases} ct_3 = \gamma(ct'_3 - \beta\alpha L) \\ L = \gamma(\beta.ct'_3 - \alpha L) \end{cases}$ et $\begin{cases} ct'_3 = \gamma(ct_3 - \beta.L) \\ -\alpha L = \gamma(-\beta.ct_3 + L) \end{cases}$

Ce qui donne $\boxed{E_3 \begin{pmatrix} ct_3 = (\alpha + \gamma)L/\gamma\beta \\ x_3 = L \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}}$ et $\boxed{E_3 \begin{pmatrix} ct'_3 = (1 + \alpha\gamma)L/\gamma\beta \\ x'_3 = -\alpha L \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}}$

2. Calculer le carré de l'intervalle entre les deux événements E_1 et E_2.

$$s_{12}^2 = (ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = \left(\frac{L}{\beta} - \frac{\alpha L}{\gamma\beta}\right)^2 - (L-0)^2 = \left(\frac{1}{\gamma^2\beta^2}(\gamma-\alpha)^2 - 1\right)L^2$$

Ce qui donne

$$s_{12}^2 = (\gamma^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2 - \gamma^2\beta^2)\frac{L^2}{\gamma^2\beta^2} = \left(-2\alpha\gamma + \alpha^2 + \gamma^2(1-\beta^2)\right)\frac{L^2}{\gamma^2\beta^2}$$

Comme $\gamma^2(1-\beta^2) = 1$

$$\boxed{s_{12}^2 = \frac{1 - 2\alpha\gamma + \alpha^2}{\gamma^2\beta^2}L^2}$$

3. Vérifier l'invariance de cet intervalle. Quel est son genre ? Expliquer.

$$s_{12}'^2 = (ct_2' - ct_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 = \left(\frac{L}{\gamma\beta} - \frac{\alpha L}{\beta}\right)^2 - (\alpha L)^2 = \left(\frac{(1-\gamma\alpha)^2}{\gamma^2\beta^2} - \alpha^2\right)L^2 = s_{12}^2$$

L'intervalle est invariant par changement de référentiel

Pour $\alpha \in]\gamma(1-\beta), \gamma(1+\beta)[$ $\Rightarrow$ $s_{12}^2 < 0$ *Intervalle genre espace*

Pour $\alpha \in [0, \gamma(1-\beta)[\cup]\gamma(1+\beta), +\infty[$ $\Rightarrow$ $s_{12}^2 > 0$ *Intervalle genre temps*

Pour $\alpha = \gamma(1 \pm \beta)$ $\Rightarrow$ $s_{12}^2 = 0$ *Intervalle genre lumière*

4. Peut-on inverser les chronologies des événements E_1 et E_2 par un changement de référentiel ? (*oui* / ~~non~~)

5. Calculer le carré de l'intervalle entre les deux événements E_1 et E_3.

$$s_{13}^2 = (ct_3 - ct_1)^2 - (x_3 - x_1)^2 = \left(\frac{(\alpha+\gamma)L}{\gamma\beta} - \frac{\alpha L}{\gamma\beta}\right)^2 - (L-0)^2 = \left(\frac{1}{\beta^2} - 1\right)L^2 = \left(\frac{1-\beta^2}{\beta^2}\right)L^2$$

Comme $(1-\beta^2) = 1/\gamma^2$

$$\boxed{s_{13}^2 = L^2/\gamma^2\beta^2}$$

6. Quel est son genre ? Expliquer.

$$s_{13}^2 > 0$$

L'intervalle est du genre temps car il concerne le même point matériel A'

7. Peut-on inverser les chronologies des événements E_1 et E_3 par un changement de référentiel ? (~~oui~~/ *non*)

8. Pour quelle valeur $\alpha_{\mathcal{R}}$ de α les événements E_1 et E_2 sont simultanés dans $\mathcal{R}$?

E_1 *et* E_2 *sont simultanés dans* $\mathcal{R}$*, donc* $ct_1 = ct_2$

$$\frac{\alpha L}{\gamma\beta} = \frac{L}{\beta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_{\mathcal{R}} = \gamma}$$

9. Pour quelle valeur $\alpha_{\mathcal{R}'}$ de α les événements E_1 et E_2 sont simultanés dans $\mathcal{R}'$?

E_1 *et* E_2 *sont simultanés dans* $\mathcal{R}'$*, donc* $ct_1' = ct_2'$

$$\frac{\alpha L}{\beta} = \frac{L}{\gamma\beta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_{\mathcal{R}'} = \frac{1}{\gamma}}$$

10. Application numérique (des questions 2, 5, 8 et 9) : $L = 1\,m$ et $v = (\sqrt{35}/6).c$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\beta = \sqrt{35}/6}$ **et** $\boldsymbol{\gamma = 6}$

$s_{12}^2 = (1 - 12\alpha + \alpha^2)/35$	$s_{13}^2 = 1/35 = 0{,}0385$	$\alpha_{\mathcal{R}} = 6$	$\alpha_{\mathcal{R}'} = 1/6 = 0{,}1667$