FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : RELATIVITÉ RESTREINTE.

EXERCICE 01: (07 *points*)

1. Force de Lorentz

$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})}$$

Loi de composition des vitesses de Galilée

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e$$

D'où

$$\boxed{\vec{F}' = q(\vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}') = q(\vec{E}' - \vec{v}_e \times \vec{B}' + \vec{v} \times \vec{B}')}$$

2. Dans le cas de référentiels galiléens :

$$\vec{a} = \vec{a}' \quad ; \quad (\vec{a}_e = \vec{a}_c = 0)$$

D'où le principe fondamental de la dynamique s'écrit dans les deux référentiels comme suit :

$$\sum \vec{f} = m\vec{a} \qquad \text{et} \qquad \sum \vec{f}' = m\vec{a}'$$

Nous avons donc la même résultante de forces dans les deux référentiels

$$\boxed{\sum \vec{f} = \sum \vec{f}'}$$

3. D'après les réponses trouvées en 1 et 2.

$$\vec{F} = \vec{F}'$$

Donc

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{E}' - \vec{v}_e \times \vec{B}' + \vec{v} \times \vec{B}'$$

Les termes $\vec{E}$ et $\vec{E}' - \vec{v}_e \times \vec{B}'$ sont indépendants de la vitesse de la charge ponctuelle, donc

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}' - \vec{v}_e \times \vec{B}'}$$

Les termes $\vec{v} \times \vec{B}$ et $\vec{v} \times \vec{B}'$ dépendent de la vitesse de la charge ponctuelle, donc

$$\boxed{\vec{B} = \vec{B}'}$$

4. Transformation de Galilée.

$$\boxed{\begin{cases} x = x' + v_e.t' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\begin{cases} x' = x - v_e.t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}}$$

5. Relations entre les dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v_e \frac{\partial}{\partial x'}$$

Equation de conservation de charges

$$div(\vec{j}) + \partial\rho/\partial t = 0$$

ρ est la densité volumique de charges.

$\vec{j} = nq.\vec{v} = \rho.\vec{v}$ est la densité volumique de courants (n densité volumique des porteurs).

Comme la charge est invariante par changement de référentiel $\rho' = \rho$.

La densité de courant dans le référentiel est donnée par :

$$\vec{j}' = \rho'.\vec{v}' = \rho\vec{v} - \rho.\vec{v}_e$$

Donc

$$\vec{j} = \vec{j}' + \rho v_e.\vec{e}_x \qquad (v_e = \text{constante})$$

En utilisant les relations des dérivées partielles

$$div(\vec{j}) = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = \frac{\partial\left(j'_{x'} + \rho v_e\right)}{\partial x'} + \frac{\partial j'_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial j'_{z'}}{\partial z'} = div'(\vec{j}') + v_e\frac{\partial\rho}{\partial x'}$$

D'un autre coté

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial\rho}{\partial t'} - v_e\frac{\partial\rho}{\partial x'} = \frac{\partial\rho'}{\partial t'} - v_e\frac{\partial\rho'}{\partial x'}$$

En faisant la somme

$$div(\vec{j}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = div'(\vec{j}') + v_e\frac{\partial\rho}{\partial x'} + \frac{\partial\rho'}{\partial t'} - v_e\frac{\partial\rho'}{\partial x'} = 0$$

Comme $\rho' = \rho$, nous trouvons la forme invariante

$$\boxed{div'(\vec{j}') + \frac{\partial\rho'}{\partial t'} = 0}$$

EXERCICE 02: (07 *points*)

1. **Transformation de Lorentz.**

$$\boxed{\begin{cases} ct' = \gamma_e(ct - \beta_e x) \\ x' = \gamma_e(-\beta_e . ct + x) \end{cases}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\begin{cases} ct = \gamma_e(ct' + \beta_e . x') \\ x = \gamma_e(\beta_e . ct' + x') \end{cases}}$$

Avec

$$\boxed{\beta_e = v_e/c} \quad \text{et} \quad \boxed{\gamma_e = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_e^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v_e^2/c^2}}}$$

2. **Forme hyperbolique.**

$$\beta_e = \tanh(r_e) = \frac{\sinh(r_e)}{\cosh(r_e)} \quad \Rightarrow \quad \gamma_e = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2(r_e)}} = \cosh(r_e)$$

D'où

$$\begin{cases} ct = \cosh(r_e)\,(ct' + \tanh(r_e)\,.\,x') \\ x = \cosh(r_e)\,(\tanh(r_e)\,.\,ct' + x') \end{cases}$$

Et

$$\boxed{\begin{cases} ct = \cosh(r_e)\,.\,ct' + \sinh(r_e)\,.\,x' \\ x = \sinh(r_e)\,.\,ct' + \cosh(r_e)\,.\,x' \end{cases}}$$

3. **Transformation résultante.**

$$\begin{cases} ct = \cosh(r_e)\,.\,ct' + \sinh(r_e)\,.\,x' \\ x = \sinh(r_e)\,.\,ct' + \cosh(r_e)\,.\,x' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} ct' = \cosh(r'_e)\,.\,ct'' + \sinh(r'_e)\,.\,x'' \\ x' = \sinh(r'_e)\,.\,ct'' + \cosh(r'_e)\,.\,x'' \end{cases}$$

En remplaçant ct' et x' dans la première transformation

$$\begin{cases} ct = \cosh(r_e)\,.\,(\cosh(r'_e)\,.\,ct'' + \sinh(r'_e)\,.\,x'') + \sinh(r_e)\,.\,(\sinh(r'_e)\,.\,ct'' + \cosh(r'_e)\,.\,x'') \\ x = \sinh(r_e)\,.\,(\cosh(r'_e)\,.\,ct'' + \sinh(r'_e)\,.\,x'') + \cosh(r_e)\,.\,(\sinh(r'_e)\,.\,ct'' + \cosh(r'_e)\,.\,x'') \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} ct = (\cosh(r_e)\cosh(r'_e) + \sinh(r_e)\sinh(r'_e)).\,ct'' + (\cosh(r_e)\sinh(r'_e) + \sinh(r_e)\cosh(r'_e)).\,x'' \\ x = (\sinh(r_e)\cosh(r'_e) + \cosh(r_e)\sinh(r'_e)).\,ct'' + (\sinh(r_e)\sinh(r'_e) + \cosh(r_e)\cosh(r'_e)).\,x'' \end{cases}$$

Comme

$$\begin{cases} \sinh(r_e)\sinh(r'_e) + \cosh(r_e)\cosh(r'_e) = \cosh(r_e + r'_e) \\ \sinh(r_e)\cosh(r'_e) + \cosh(r_e)\sinh(r'_e) = \sinh(r_e + r'_e) \end{cases}$$

Il vient que

$$\boxed{\begin{cases} ct = \cosh(r_e + r'_e)\,.\,ct'' + \sinh(r_e + r'_e)\,.\,x'' \\ x = \sinh(r_e + r'_e)\,.\,ct'' + \cosh(r_e + r'_e)\,.\,x'' \end{cases}}$$

Qui a la forme d'une transformation de Lorentz avec une rapidité $\boxed{r''_e = r_e + r'_e}$

4. $$v_e = v'_e = 0{,}9.\,c \quad \Rightarrow \quad \beta_e = \beta'_e = 0{,}9$$

Comme

$$r_e = r'_e = \operatorname{arctanh}(\beta_e) = \operatorname{arctanh}(0{,}9)$$

Donc

$$r''_e = 2.\operatorname{arctanh}(0{,}9) = 2{,}9444$$

Et

$$\beta''_e = \frac{v''_e}{c} = \tanh(r''_e) = \tanh(2{,}9444) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v''_e = 0{,}9944.\,c}$$

5. La Barre est liée au référentiel $\mathcal{R}'$.

$$l' = l_{\text{propre}}$$

Comme le référentiel $\mathcal{R}$ est en translation uniforme avec une vitesse $-v_e$ par rapport à $\mathcal{R}'$, et le référentiel $\mathcal{R}''$ est en translation uniforme avec une vitesse v'_e par rapport à $\mathcal{R}'$.

$$l = \frac{l_{\text{propre}}}{\gamma_e} \qquad \text{et} \qquad l'' = \frac{l_{\text{propre}}}{\gamma'_e}$$

Et comme $\gamma_e = \gamma'_e$, alors

$$l = l'' = \frac{l'}{\gamma_e} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{l' = \gamma_e . l = 2{,}2941.\, l} \qquad \text{et} \qquad \boxed{l'' = l}$$

6. La durée du film est l'intervalle de temps entre deux événements (début et fin du film) qui se passent sur une télé liée au référentiel $\mathcal{R}$.

$$\Delta t = \tau_{\text{propre}}$$

Comme le référentiel $\mathcal{R}''$ est en translation uniforme avec une vitesse v''_e par rapport à $\mathcal{R}$.

$$\Delta t'' = \gamma''_e . \tau_{\text{propre}} \qquad \text{avec} \qquad \gamma''_e = \frac{1}{\sqrt{1 - {v''_e}^2/c^2}}$$

D'où

$$\boxed{\Delta t'' = \gamma''_e \Delta t = 9{,}4623.\, \Delta t} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\Delta t'' = 18{,}9247\ heures}$$

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : RELATIVITÉ RESTREINTE.

Matricule :	Nom : Doe	Prénom : John	Groupe :

Questions de cours : (06 points)

Encercler la (les) lettre(s) correspondant à la bonne réponse :

1. Quelle expérience est généralement citée pour montrer que la vitesse de la lumière dans le vide est invariante par rapport tous les référentiels galiléens ?
   a. L'expérience de la roue dentée de Fizeau.
   b. L'expérience du miroir tournant de Foucault.
   c. L'expérience d'interférométrie de Michelson et Morley.
   d. L'expérience du mont Washington sur la désintégration des muons.

2. Parmi les lois suivantes, quelles sont les équations (lois) invariantes par la transformation de Galilée pour tous les référentiels galiléens ?
   a. Le principe fondamental de la dynamique.
   b. Les équations de Maxwell.
   c. Les équations de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide.
   d. L'équation de continuité en électromagnétisme.

3. Parmi les grandeurs suivantes, Quelles sont les grandeurs invariantes par la transformation de Lorentz pour tous les référentiels galiléens ?
   a. La vitesse de la lumière dans le vide.
   b. La durée (intervalle de temps) entre deux événements.
   c. La distance (intervalle d'espace) entre deux événements.
   d. L'intervalle espace-temps entre deux événements.

4. Dans quels cas peut-on inverser l'ordre chronologique entre deux événements par changement de référentiel ?
   a. Si l'intervalle entre les deux événements est du genre temps.
   b. Si l'intervalle entre les deux événements est du genre espace.
   c. Si l'intervalle entre les deux événements est du genre lumière.
   d. Dans aucun cas.

5. Un homme est assis à l'intérieur d'un train se déplaçant à très grande vitesse par rapport à la terre. Il remarque alors que :
   a. La largeur des fenêtres de son compartiment diminue.
   b. La largeur des fenêtres de son compartiment augmente.
   c. Les journées (durées entre le lever et le coucher du soleil) sont plus courtes.
   d. Les journées sont plus longues.

6. Le « décalage vers le rouge » ou « red-shift » est un phénomène …
   a. De décalage, du spectre observé d'un astre, vers les fréquences plus basses.
   b. De décalage, du spectre observé d'un astre, vers les fréquences plus élevée.
   c. Dû au rapprochement relatif de la source (astre) et du récepteur (observateur).
   d. Dû à l'éloignement relatif de la source (astre) et du récepteur (observateur).