FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : RELATIVITÉ RESTREINTE.

EXERCICE 01: (06 *points*)

1. Transformation de Lorentz.

$$\begin{cases} ct = \gamma_e(ct' + \beta_e.x') \\ x = \gamma_e(\beta_e.ct' + x') \end{cases}$$

2. Forme hyperbolique de la transformation de Lorentz.

La rapidité r_e est donnée par :

$$\beta_e = \tanh r_e$$

Donc

$$\gamma_e = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_e^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 r_e}} \quad \Rightarrow \quad \gamma_e = \cosh r_e$$

Et

$$\beta_e\gamma_e = \tanh r_e . \cosh r_e = \sinh r_e$$

En remplaçant dans la transformation de Lorentz, nous obtenons la forme hyperbolique :

$$\begin{cases} ct = \cosh r_e . ct' + \sinh r_e . x' \\ x = \sinh r_e . ct' + \cosh r_e . x' \end{cases}$$

3. Matrice de Lorentz.

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad L = \begin{pmatrix} \cosh r_e & \sinh r_e \\ \sinh r_e & \cosh r_e \end{pmatrix}$$

4. Valeurs propres.

$$\begin{vmatrix} \cosh r_e & \sinh r_e \\ \sinh r_e & \cosh r_e \end{vmatrix} = 0$$

$$(\cosh r_e - \lambda)^2 - (\sinh r_e)^2 = 0$$

$$\begin{cases} \cosh r_e - \lambda_1 = +\sinh r_e \\ \cosh r_e - \lambda_2 = -\sinh r_e \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} \lambda_1 = \cosh r_e - \sinh r_e \\ \lambda_2 = \cosh r_e + \sinh r_e \end{cases}}$$

5. Le système d'équations caractéristiques.

$$\begin{cases} (\cosh r_e - \lambda). ct' + \sinh r_e . x' = 0 \\ \sinh r_e . ct' + (\cosh r_e - \lambda). x' = 0 \end{cases}$$

En remplaçant par les valeurs propres précédentes :

Pour $\lambda_1 = \cosh r_e - \sinh r_e$

$$\begin{cases} \sinh r_e . ct' + \sinh r_e . x' = 0 \\ \sinh r_e . ct' + \sinh r_e . x' = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x' = -ct'$$

Et la pente du vecteur propre

$$\boxed{\frac{ct'}{x'} = -1}$$

Pour $\lambda_2 = \cosh r_e + \sinh r_e$

$$\begin{cases} -\sinh r_e \, . \, ct' + \sinh r_e \, . \, x' = 0 \\ \sinh r_e \, . \, ct' - \sinh r_e \, . \, x' = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x' = +ct'$$

Et la pente du vecteur propre

$$\boxed{\frac{ct'}{x'} = +1}$$

Ces directions représentent les deux droites de lumière délimitant le cône (plat) de lumière dans l'espace de Minkowski.

Le vecteur propre d'une matrice est un vecteur qui ne change pas de direction (de pente) par l'application de cette matrice (produit de la matrice par le vecteur).

L'invariance des pentes de ces deux directions par l'application de la matrice L exprime l'invariance, par la transformation de Lorentz, de la vitesse de la lumière pour tous les référentiels galiléens.

EXERCICE 02 : (11 *points*)

1. **Coordonnées des événements.** La transformation de Lorentz donne

$$\begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta.x') \\ x = \gamma(\beta.ct' + x') \end{cases} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$E_1 =$ *« L'arrière du train entre dans le tunnel ».*

L'arrière du train est à une distance l derrière le point O' dans le référentiel $\mathcal{R}'$, donc : $\boxed{x'_1 = -l}$.

L'entrée du tunnel coïncide avec le point O dans le référentiel $\mathcal{R}$, donc : $\boxed{x_1 = 0}$

En utilisant la transformation de Lorentz

$$\begin{cases} ct_1 = \gamma.(ct'_1 - \beta.l) \\ 0 = \gamma.(\beta.ct'_1 - l) \end{cases} \Rightarrow \quad ct'_1 = \frac{1}{\beta}l \quad \text{et} \quad ct_1 = \gamma.\left(\frac{1-\beta^2}{\beta}\right)l = \frac{1}{\gamma\beta}l$$

D'où

$$\boxed{E_1 = \begin{pmatrix} ct_1 = (1/\gamma\beta)l \\ x_1 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}} \quad ; \quad \boxed{E_1 = \begin{pmatrix} ct'_1 = (1/\beta)l \\ x'_1 = -l \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}}$$

$E_2 =$ *« L'avant du train sort du tunnel ».*

L'avant du train coïncide avec le point O' dans le référentiel $\mathcal{R}'$, donc : $\boxed{x'_2 = 0}$.

La sortie du tunnel est à une distance $2l$ devant le point O dans le référentiel $\mathcal{R}$, donc : $\boxed{x_2 = +2l}$

En utilisant la transformation de Lorentz

$$\begin{cases} ct_2 = \gamma.(ct'_2 + \beta.0) \\ 2l = \gamma.(\beta.ct'_2 + 0) \end{cases} \Rightarrow \quad ct'_2 = \frac{1}{\gamma\beta}2l \quad \text{et} \quad ct_2 = \frac{1}{\beta}2l$$

D'où

$$\boxed{E_2 = \begin{pmatrix} ct_2 = (1/\beta)2l \\ x_2 = 2l \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}} \quad ; \quad \boxed{E_2 = \begin{pmatrix} ct'_2 = (1/\gamma\beta)2l \\ x'_2 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}}$$

$E_3 =$ *« Réception du signal lumineux par un passager à l'arrière du train».*

Le rayon lumineux traverse une distance l dans le référentiel à une vitesse (invariante) c.

$$l = c(t'_3 - t'_2)$$

Donc

$$ct'_3 = ct'_2 + l \quad \Rightarrow \quad \boxed{ct'_3 = \frac{1}{\gamma\beta}2l + l}$$

Et puisque la réception se fait à l'arrière du train : $\boxed{x'_3 = -l}$

En utilisant la transformation de Lorentz

$$\begin{cases} ct_3 = \gamma.(ct'_3 + \beta.x'_3) \\ x_3 = \gamma.(\beta.ct'_3 + x'_3) \end{cases} \Rightarrow \quad ct_3 = \left(\frac{2}{\beta} + \gamma(1-\beta)\right)l \quad \text{et} \quad x_3 = \big(2 - \gamma(1-\beta)\big)l$$

D'où

$$\boxed{E_3 = \begin{pmatrix} ct_3 = \left(\frac{2}{\beta} + \gamma(1-\beta)\right)l \\ x_3 = \big(2-\gamma(1-\beta)\big)l \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}} \quad ; \quad \boxed{E_3 = \begin{pmatrix} ct'_3 = \left(\frac{2}{\gamma\beta} + 1\right)l \\ x'_3 = -l \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}}$$

2. Carré des intervalles espace-temps.

$$s_{12}^2 = (ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = \left(\frac{2}{\beta}l - \frac{1}{\gamma\beta}l\right)^2 - (2l - 0)^2$$

$$s_{12}^2 = \left(\frac{4\gamma^2 - 4\gamma + 1}{\gamma^2\beta^2} - 4\right)l^2 = \left(\frac{4\gamma^2(1-\beta^2) - 4\gamma + 1}{\gamma^2\beta^2}\right)l^2$$

$$\boxed{s_{12}^2 = \frac{4(1-\gamma)+1}{\gamma^2\beta^2}l^2}$$

$$s_{13}^2 = {s'_{13}}^2 = (ct'_3 - ct'_1)^2 - (x'_3 - x'_1)^2 = \left(\left(\frac{2}{\gamma\beta}+1\right)l - \frac{1}{\beta}l\right)^2 - (-l + l)^2$$

$$\boxed{s_{13}^2 = \left(\frac{2+\gamma\beta-\gamma}{\gamma\beta}\right)^2 l^2} \quad ; \quad s_{13}^2 > 0 \quad \text{genre temps}$$

$$s_{23}^2 = {s'_{23}}^2 = (ct'_3 - ct'_2)^2 - (x'_3 - x'_2)^2 = \left(\left(\frac{2}{\gamma\beta}+1\right)l - \frac{2}{\gamma\beta}l\right)^2 - (-l - 0)^2$$

$$\boxed{s_{23}^2 = 0} \qquad \text{genre lumière}$$

3. E_1 et E_2 sont simultanés dans $\mathcal{R}'$.

$$ct'_1 = ct'_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\beta}l = \frac{2}{\gamma\beta}l \quad \text{et} \quad \gamma = 2$$

Donc

$$\frac{1}{1-\beta^2} = 4 \quad \Rightarrow \quad \beta^2 = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \boxed{v = \frac{\sqrt{3}}{2}c}$$

4. E_1 et E_2 sont simultanés dans $\mathcal{R}$.

$$ct_1 = ct_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\gamma\beta}l = \frac{2}{\beta}l \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{2} \quad \text{impossible}$$

Donc aucune vitesse de translation du train par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ ne permet d'observer une simultanéité des événements E_1 et E_2.

5. E_1 et E_3 simultanés dans $\mathcal{R}'$.

$$ct'_1 = ct'_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\beta}l = \left(\frac{2}{\gamma\beta}+1\right)l$$

Donc

$$2 + \gamma\beta = \gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma(1-\beta) = 2$$

En élevant au carré

$$\frac{(1-\beta)^2}{1-\beta^2} = 4 \quad \Rightarrow \quad (1-\beta) = 4(1+\beta)$$

Et donc

$$\beta = -\frac{3}{5} \quad \text{ou} \quad \boxed{v = -\frac{3}{5}c}$$

Cette condition n'est possible que si le train recule. Dans ce cas, les événements E_1, E_2 et E_3 sont antérieurs à E_0 et doivent être renommés.
E_1 = « L'arrière du train sort du tunnel » ; E_2 = « L'avant du train entre dans le tunnel ».

6. Rapport des fréquences

Le décalage des fréquences est du à l'effet Doppler-Fizeau longitudinal. Donc

$$f_{\text{réc}} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f_{\text{ém}}$$

Et

$$\boxed{\alpha = \frac{f_{\text{ém}}}{f_{\text{réc}}} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}}$$

Avec $\beta = -3/5$ (le train allant vers l'arrière l'émetteur en avant du train se rapproche du récepteur à l'entrée du tunnel).

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$$

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : RELATIVITÉ RESTREINTE.

Nom : Doe	**Prénom : John**

Questions de cours : (06 points)

Encercler la (les) lettre(s) correspondant à la bonne réponse :

1. Je tombe à la verticale du haut d'un immeuble, je sors mes clefs et je les lâche devant moi sans vitesse initiale. Si les frottements avec l'air sont négligeables, alors le mouvement des clefs par rapport à moi (mon référentiel) est :
   a. Rectiligne uniforme.
   b. Rectiligne uniformément varié.
   c. Projectile (arc de parabole).
   d. Statique (vitesse nulle).

2. Dans le cas de deux référentiels galiléens :
   a. La vitesse d'emportement pour tout corps en mouvement est nulle.
   b. L'accélération d'emportement pour tout corps en mouvement est nulle.
   c. L'accélération de Coriolis pour tout corps en mouvement est nulle.
   d. L'accélération de Coriolis pour tout corps en mouvement est constante.

3. Le **résultat** de l'expérience de Michelson et Morley est que la vitesse de la lumière dans le vide :
   a. Dépend du mouvement de la source.
   b. Dépend de la vitesse du récepteur.
   c. Dépend de son milieu de propagation (éther).
   d. Est la même dans tous les référentiels galiléens.

4. La composition de deux transformations de Lorentz, pour des référentiels se déplaçant suivant la même direction et avec des vitesses constantes les uns par rapport aux autres, donne une transformation de Lorentz, tel que :
   a. $v_{\text{résultante}} = v_1 + v_2$ (la vitesse de translation).
   b. $\beta_{\text{résultante}} = \beta_1 + \beta_2$ (le facteur $\beta = v/c$).
   c. $\gamma_{\text{résultante}} = \gamma_1 + \gamma_2$ (le facteur $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$).
   d. $r_{\text{résultante}} = r_1 + r_2$ (la rapidité $r = \operatorname{arctanh} \beta$).

5. Si deux événements sont simultanés et non localisés par rapport à un observateur lié à un référentiel galiléen quelconque, alors l'intervalle espace-temps entre les deux événements est :
   a. Du genre espace.
   b. Du genre temps.
   c. Du genre lumière.
   d. Les deux événements sont liés par un rapport de causalité.

6. Une voiture qui passe devant moi avec une grande vitesse (proche de la vitesse de la lumière) :
   a. Me parait plus longue qu'une voiture du même modèle à l'arrêt.
   b. Me parait plus courte qu'une voiture du même modèle à l'arrêt.
   c. Me parait plus récente qu'une voiture de la même série (année) à l'arrêt.
   d. Me parait plus ancienne qu'une voiture de la même série (année) à l'arrêt.