

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE
 MODULE : RELATIVITÉ RESTREINTE.

EXERCICE : (11 points)

1. Coordonnées des événements. La transformation de Lorentz donne

$$\begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta \cdot x') \\ x = \gamma(\beta \cdot ct' + x') \end{cases} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$E_1 =$ « L'arrière du train entre dans le tunnel ».

L'arrière du train est à une distance l derrière le point O' dans le référentiel \mathcal{R}' , donc : $x'_1 = -l$.

L'entrée du tunnel coïncide avec le point O dans le référentiel \mathcal{R} , donc : $x_1 = 0$

En utilisant la transformation de Lorentz

$$\begin{cases} ct_1 = \gamma \cdot (ct'_1 - \beta \cdot l) \\ 0 = \gamma \cdot (\beta \cdot ct'_1 - l) \end{cases} \Rightarrow ct'_1 = \frac{1}{\beta} l \quad \text{et} \quad ct_1 = \gamma \cdot \left(\frac{1 - \beta^2}{\beta} \right) l = \frac{1}{\gamma\beta} l$$

D'où

$$E_1 = \left(\begin{array}{c} ct_1 = (1/\gamma\beta)l \\ x_1 = 0 \end{array} \right)_{\mathcal{R}} ; \quad E_1 = \left(\begin{array}{c} ct'_1 = (1/\beta)l \\ x'_1 = -l \end{array} \right)_{\mathcal{R}'}$$

$E_2 =$ « L'avant du train sort du tunnel ».

L'avant du train coïncide avec le point O' dans le référentiel \mathcal{R}' , donc : $x'_2 = 0$.

La sortie du tunnel est à une distance $2l$ devant le point O dans le référentiel \mathcal{R} , donc : $x_2 = +2l$

En utilisant la transformation de Lorentz

$$\begin{cases} ct_2 = \gamma \cdot (ct'_2 + \beta \cdot 0) \\ 2l = \gamma \cdot (\beta \cdot ct'_2 + 0) \end{cases} \Rightarrow ct'_2 = \frac{1}{\beta} 2l \quad \text{et} \quad ct_2 = \frac{1}{\beta} 2l$$

D'où

$$E_2 = \left(\begin{array}{c} ct_2 = (1/\beta)2l \\ x_2 = 2l \end{array} \right)_{\mathcal{R}} ; \quad E_2 = \left(\begin{array}{c} ct'_2 = (1/\gamma\beta)2l \\ x'_2 = 0 \end{array} \right)_{\mathcal{R}'}$$

$E_3 =$ « Réception du signal lumineux par un passager à l'arrière du train ».

Le rayon lumineux traverse une distance l dans le référentiel à une vitesse (invariante) c .

$$l = c(t'_3 - t'_2)$$

Donc

$$ct'_3 = ct'_2 + l \Rightarrow ct'_3 = \frac{1}{\gamma\beta} 2l + l$$

Et puisque la réception se fait à l'arrière du train : $x'_3 = -l$

En utilisant la transformation de Lorentz

$$\begin{cases} ct_3 = \gamma \cdot (ct'_3 + \beta \cdot x'_3) \\ x_3 = \gamma \cdot (\beta \cdot ct'_3 + x'_3) \end{cases} \Rightarrow ct_3 = \left(\frac{2}{\beta} + \gamma(1 - \beta) \right) l \quad \text{et} \quad x_3 = (2 - \gamma(1 - \beta))l$$

D'où

$$E_3 = \left(\begin{array}{c} ct_3 = \left(\frac{2}{\beta} + \gamma(1 - \beta) \right) l \\ x_3 = (2 - \gamma(1 - \beta))l \end{array} \right)_{\mathcal{R}} ; \quad E_3 = \left(\begin{array}{c} ct'_3 = \left(\frac{2}{\gamma\beta} + 1 \right) l \\ x'_3 = -l \end{array} \right)_{\mathcal{R}'}$$

2. Carré des intervalles espace-temps.

$$s_{12}^2 = (ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = \left(\frac{2}{\beta}l - \frac{1}{\gamma\beta}l\right)^2 - (2l - 0)^2$$

$$s_{12}^2 = \left(\frac{4\gamma^2 - 4\gamma + 1}{\gamma^2\beta^2} - 4\right)l^2 = \left(\frac{4\gamma^2(1 - \beta^2) - 4\gamma + 1}{\gamma^2\beta^2}\right)l^2$$

$$\boxed{s_{12}^2 = \frac{4(1 - \gamma) + 1}{\gamma^2\beta^2} l^2}$$

$$s_{13}^2 = s'_{13}{}^2 = (ct'_3 - ct'_1)^2 - (x'_3 - x'_1)^2 = \left(\left(\frac{2}{\gamma\beta} + 1\right)l - \frac{1}{\beta}l\right)^2 - (-l + l)^2$$

$$\boxed{s_{13}^2 = \left(\frac{2 + \gamma\beta - \gamma}{\gamma\beta}\right)^2 l^2} \quad ; \quad s_{13}^2 > 0 \quad \text{genre temps}$$

$$s_{23}^2 = s'_{23}{}^2 = (ct'_3 - ct'_2)^2 - (x'_3 - x'_2)^2 = \left(\left(\frac{2}{\gamma\beta} + 1\right)l - \frac{2}{\gamma\beta}l\right)^2 - (-l - 0)^2$$

$$\boxed{s_{23}^2 = 0} \quad \text{genre lumière}$$

3. E_1 et E_2 sont simultanés dans \mathcal{R}' .

$$ct'_1 = ct'_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\beta}l = \frac{2}{\gamma\beta}l \quad \text{et} \quad \gamma = 2$$

Donc

$$\frac{1}{1 - \beta^2} = 4 \quad \Rightarrow \quad \beta^2 = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \boxed{v = \frac{\sqrt{3}}{2}c}$$

4. E_1 et E_2 sont simultanés dans \mathcal{R} .

$$ct_1 = ct_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\gamma\beta}l = \frac{2}{\beta}l \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{2} \quad \text{impossible}$$

Donc aucune vitesse de translation du train par rapport au référentiel \mathcal{R} ne permet d'observer une simultanéité des événements E_1 et E_2 .

5. E_1 et E_3 simultanés dans \mathcal{R}' .

$$ct'_1 = ct'_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\beta}l = \left(\frac{2}{\gamma\beta} + 1\right)l$$

Donc

$$2 + \gamma\beta = \gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma(1 - \beta) = 2$$

En élevant au carré

$$\frac{(1 - \beta)^2}{1 - \beta^2} = 4 \quad \Rightarrow \quad (1 - \beta) = 4(1 + \beta)$$

Et donc

$$\beta = -\frac{3}{5} \quad \text{ou} \quad \boxed{v = -\frac{3}{5}c}$$

Cette condition n'est possible que si le train recule. Dans ce cas, les événements E_1 , E_2 et E_3 sont antérieurs à E_0 et doivent être renommés.

E_1 = « L'arrière du train sort du tunnel » ; E_2 = « L'avant du train entre dans le tunnel ».

6. Rapport des fréquences

Le décalage des fréquences est dû à l'effet Doppler-Fizeau longitudinal. Donc

$$f_{\text{réc}} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} f_{\text{ém}}$$

Et

$$\alpha = \frac{f_{\text{ém}}}{f_{\text{réc}}} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

Avec $\beta = -3/5$ (le train allant vers l'arrière l'émetteur en avant du train se rapproche du récepteur à l'entrée du tunnel).

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE
 MODULE : RELATIVITÉ RESTREINTE.

Nom : Doe

Prénom : John

Questions de cours : (12 points)**Encercler la (les) lettre(s) correspondant à la bonne réponse :**

- Je tombe à la verticale du haut d'un immeuble, je sors mes clefs et je les lâche devant moi sans vitesse initiale. Si les frottements avec l'air sont négligeables, alors le mouvement des clefs par rapport à moi (mon référentiel) est :
 - Rectiligne uniforme.
 - Rectiligne uniformément varié.
 - Projectile (arc de parabole).
 - Statique (vitesse nulle).
- Dans le cas de deux référentiels galiléens :
 - La vitesse d'emportement pour tout corps en mouvement est nulle.
 - L'accélération d'emportement pour tout corps en mouvement est nulle.
 - L'accélération de Coriolis pour tout corps en mouvement est nulle.
 - L'accélération de Coriolis pour tout corps en mouvement est constante.
- « En fait la terre ne tourne pas ! Si la terre effectuait vraiment un tour sur elle-même par jour et avec un rayon de 6400 km, comme les gens le croient, alors une ville à la surface de la terre se déplacerait avec une vitesse de 1500 km/h environ d'ouest en est. Donc si je prend l'avion pour aller à Pékin par exemple, Pékin s'éloignerait de moi à une vitesse de 1500 km/h, bien plus vite que la vitesse de l'avion qui est d'environ 600 km/h et je n'atteindrais jamais Pékin ». Que répondre à cela ?

..... $\vec{v}_{\text{ville/géocentrique}} = 1500 \text{ km/h}$: vitesse de la ville par rapport à un référentiel qui ne tourne pas avec la terre (géocentrique)

..... $\vec{v}_{\text{avion/terrestre}} = 600 \text{ km/h}$: vitesse de l'avion par rapport à un référentiel lié à la surface de la terre (terrestre)

..... $\vec{v}_{\text{avion/géocentrique}} = \vec{v}_{\text{avion/terrestre}} + \vec{v}_{\text{terrestre/géocentrique}} = 2100 \text{ km/h}$

- Le **résultat** de l'expérience de Michelson et Morley est que la vitesse de la lumière dans le vide :
 - Dépend du mouvement de la source.
 - Dépend de la vitesse du récepteur.
 - Dépend de son milieu de propagation (éther).
 - Est la même dans tous les référentiels galiléens.
- Parmi les grandeurs suivantes, Quelles sont les grandeurs invariantes par la transformation de Lorentz pour tous les référentiels galiléens ?
 - La simultanéité de deux évènements.
 - La durée (intervalle de temps) entre deux évènements.
 - La distance (intervalle d'espace) entre deux évènements.
 - L'intervalle espace-temps entre deux évènements.

6. La composition de deux transformations de Lorentz, pour des référentiels se déplaçant suivant la même direction et avec des vitesses constantes les uns par rapport aux autres, donne une transformation de Lorentz, tel que :
- $v_{\text{résultante}} = v_1 + v_2$ (la vitesse de translation).
 - $\beta_{\text{résultante}} = \beta_1 + \beta_2$ (le facteur $\beta = v/c$).
 - $\gamma_{\text{résultante}} = \gamma_1 + \gamma_2$ (le facteur $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$).
 - $r_{\text{résultante}} = r_1 + r_2$ (la rapidité $r = \text{arctanh } \beta$).
7. Si un intervalle espace-temps entre deux événements est « du genre temps », alors :
- La grandeur $c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$ est positive.
 - Les deux événements peuvent être reliés par une ligne d'univers.
 - Un des événements se trouve en dehors du cône de lumière centré sur l'autre événement.
 - Les deux événements représentent l'évolution dans le temps de la même particule.
8. Si deux événements sont simultanés et non localisés par rapport à un observateur lié à un référentiel galiléen quelconque, alors l'intervalle espace-temps entre les deux événements est :
- Du genre espace.
 - Du genre temps.
 - Du genre lumière.
 - Les deux événements sont liés par un rapport de causalité.
- 9.
- Les durées propres sont plus longues que celles mesurées dans un référentiel impropre.
 - Les durées propres sont plus courtes que celles mesurées dans un référentiel impropre.
 - Les longueurs propres sont plus petites que celles mesurées dans un référentiel impropre.
 - Les longueurs propres sont plus grandes que celles mesurées dans un référentiel impropre.
10. Une voiture qui passe devant moi avec une grande vitesse (proche de la vitesse de la lumière) :
- Me paraît plus longue qu'une voiture du même modèle à l'arrêt.
 - Me paraît plus courte qu'une voiture du même modèle à l'arrêt.
 - Me paraît plus récente qu'une voiture de la même série (année) à l'arrêt.
 - Me paraît plus ancienne qu'une voiture de la même série (année) à l'arrêt.
11. Le « décalage vers le rouge » ou « red-shift » est un phénomène ...
- De décalage, du spectre observé d'un astre, vers les fréquences plus élevées.
 - De décalage, du spectre observé d'un astre, vers les fréquences plus basses.
 - Dû au rapprochement relatif de la source (astre) et du récepteur (observateur).
 - Dû à l'éloignement relatif de la source (astre) et du récepteur (observateur).

12. Résumer la relativité par la phrase « tout est relatif » vous semble-t-il juste ? (oui/non)

Pourquoi ?

... certaines grandeurs sont absolues (invariantes par changement de référentiel)
 ... par exemple : la vitesse de la lumière dans le vide et l'intervalle espace-temps entre deux événements