FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : RELATIVITÉ RESTREINTE

DURÉE TOTALE : 60 minutes. **(Feuille 1/2)**

Nom et Prénom : John Doe	Signature :	Note : /20

Exercice 01 : (10 points)

1. Ecrire la transformation de Lorentz réduite aux deux coordonnées (ct, x) d'un événement dans le référentiel $\mathcal{R}$ en fonction des coordonnées (ct', x') du même événement dans le référentiel $\mathcal{R}'$ en translation uniforme d'une vitesse $\vec{v}_e = v_e.\vec{e}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$, les axes (Ox) et $(O'x')$ étant parallèles. Expliciter β_e et la constante relativiste γ_e.

$$\boxed{\begin{cases} ct = \gamma_e(ct' + \beta_e.x') \\ x = \gamma_e(\beta_e.ct' + x') \end{cases}} \quad ou \quad \boxed{\begin{cases} ct' = \gamma_e(ct - \beta_e x) \\ x' = \gamma_e(-\beta_e.ct + x) \end{cases}}$$

Avec

$$\boxed{\beta_e = v_e/c} \quad et \quad \boxed{\gamma_e = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_e^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v_e^2/c^2}}}$$

2. En posant $\beta_e = \tanh(r_e)$ trouver la forme hyperbolique de la transformation de Lorentz. (r_e est la rapidité).

$$\beta_e = \tanh(r_e) = \frac{\sinh(r_e)}{\cosh(r_e)} \quad \Rightarrow \quad \gamma_e = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2(r_e)}} = \cosh(r_e)$$

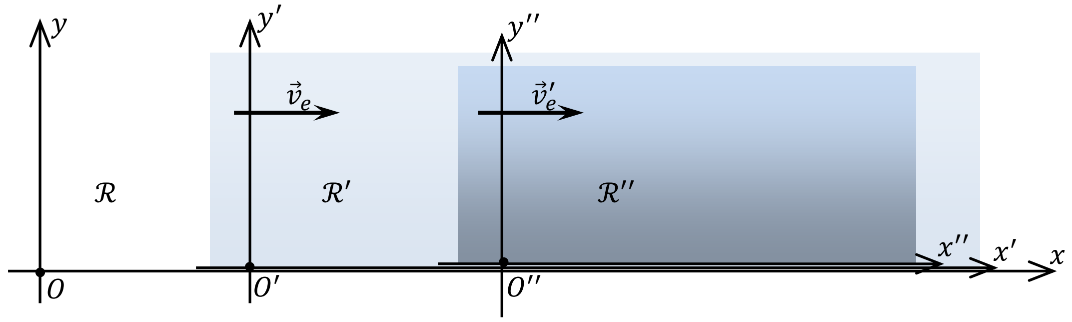
D'où

$$\begin{cases} ct = \cosh(r_e)\,(ct' + \tanh(r_e)\,.\,x') \\ x = \cosh(r_e)\,(\tanh(r_e)\,.\,ct' + x') \end{cases}$$

et

$$\boxed{\begin{cases} ct = \cosh(r_e)\,.\,ct' + \sinh(r_e)\,.\,x' \\ x = \sinh(r_e)\,.\,ct' + \cosh(r_e)\,.\,x' \end{cases}}$$

Soit $\mathcal{R}''$ un référentiel en translation uniforme d'une vitesse $\vec{v}'_e = v'_e.\vec{e}_{x'}$ par rapport à $\mathcal{R}'$, les axes $(O'x')$ et $(O''x'')$ étant parallèles.



3. Montrer à l'aide de l'écriture hyperbolique que la relation entre les coordonnées (ct,x) et (ct'',x'') d'un même événement dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}''$ est aussi une transformation de Lorentz. Quelle est alors la rapidité r_e'' de la transformation résultante ? (on note r_e' la rapidité de la transformation $\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}''$)

$$\begin{cases} ct = \cosh(r_e).ct' + \sinh(r_e).x' \\ x = \sinh(r_e).ct' + \cosh(r_e).x' \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} ct' = \cosh(r_e').ct'' + \sinh(r_e').x'' \\ x' = \sinh(r_e').ct'' + \cosh(r_e').x'' \end{cases}$$

En remplaçant ct' et x' dans la première transformation

$$\begin{cases} ct = \cosh(r_e).(\cosh(r_e').ct'' + \sinh(r_e').x'') + \sinh(r_e).(\sinh(r_e').ct'' + \cosh(r_e').x'') \\ x = \sinh(r_e).(\cosh(r_e').ct'' + \sinh(r_e').x'') + \cosh(r_e).(\sinh(r_e').ct'' + \cosh(r_e').x'') \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} ct = (\cosh(r_e)\cosh(r_e') + \sinh(r_e)\sinh(r_e')).ct'' + (\cosh(r_e)\sinh(r_e') + \sinh(r_e)\cosh(r_e')).x'' \\ x = (\sinh(r_e)\cosh(r_e') + \cosh(r_e)\sinh(r_e')).ct'' + (\sinh(r_e)\sinh(r_e') + \cosh(r_e)\cosh(r_e')).x'' \end{cases}$$

Comme

$$\begin{cases} \sinh(r_e)\sinh(r_e') + \cosh(r_e)\cosh(r_e') = \cosh(r_e + r_e') \\ \sinh(r_e)\cosh(r_e') + \cosh(r_e)\sinh(r_e') = \sinh(r_e + r_e') \end{cases}$$

Il vient que

$$\boxed{\begin{cases} ct = \cosh(r_e + r_e').ct'' + \sinh(r_e + r_e').x'' \\ x = \sinh(r_e + r_e').ct'' + \cosh(r_e + r_e').x'' \end{cases}}$$

Qui a la forme d'une transformation de Lorentz avec une rapidité

$$\boxed{r_e'' = r_e + r_e'}$$

4. En posant : $v_e = v_e' = 0{,}95 \times c$. Quelle est la vitesse de translation v_e'' de $\mathcal{R}''$ par rapport à $\mathcal{R}$?

$$v_e = v_e' = 0{,}95.c \quad \Rightarrow \quad \beta_e = \beta_e' = 0{,}95$$

Comme

$$r_e = r_e' = \operatorname{arctanh}(\beta_e) = \operatorname{arctanh}(0{,}95)$$

Donc

$$r_e'' = r_e + r_e' = 2.\operatorname{arctanh}(0{,}95) = 3{,}6635$$

et

$$\beta_e'' = \frac{v_e''}{c} = \tanh(r_e'') = \tanh(3{,}6635) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_e'' = 0{,}9987.c}$$

On donne : $\begin{cases} \cosh(a+b) = \cosh(a).\cosh(b) + \sinh(a).\sinh(b) \\ \sinh(a+b) = \sinh(a).\cosh(b) + \cosh(a).\sinh(b) \end{cases}$; $\begin{cases} \tanh(a) = \sinh(a)/\cosh(a) \\ \cosh^2(a) - \sinh^2(a) = 1 \end{cases}$

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE SEMESTRIELLE

MODULE : RELATIVITÉ RESTREINTE

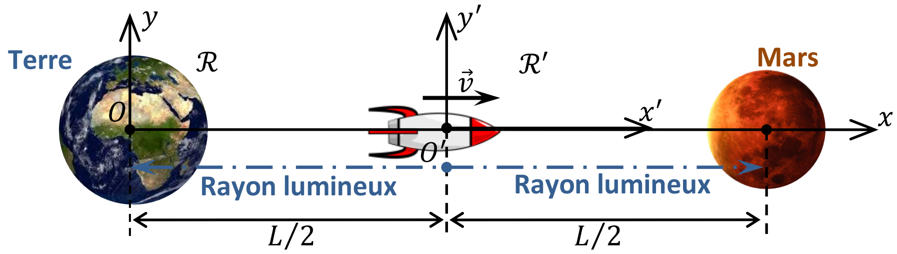
DURÉE TOTALE : 60 minutes. **(Feuille 2/2)**

Nom et Prénom : John Doe	**Signature :**

Exercice 02 : (10 points)

Une fusée (liée au référentiel $\mathcal{R}'$) se déplace avec une vitesse constante $v = \beta.c$ par rapport à la Terre (référentiel $\mathcal{R}$). Elle fait le voyage, en ligne droite, de la Terre vers Mars, considérée comme fixe et à une distance L par rapport à la terre (figure en bas). Les conditions initiales et les directions des axes sont ceux de la transformée de Lorentz dont les variables sont (ct, x).

Nous appelons les événements : E_0 « passage de la fusée par la Terre », E_1 « passage de la fusée par Mars»



1. Ecrire en fonction de β, γ et L les coordonnées des événements E_0 et E_1 dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

Transformation de Lorentz

$$\begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta.x') \\ x = \gamma(\beta.ct' + x') \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta.x) \\ x' = \gamma(-\beta.ct + x) \end{cases}$$

Evénement E_0 « passage de la fusée par la Terre» : $x_0 = 0$ et $x'_0 = 0$

Donc $\begin{cases} ct_0 = \gamma(ct'_0 + \beta.0) \\ 0 = \gamma(\beta.ct'_0 + 0) \end{cases}$ ce qui donne $\boxed{E_0 \begin{pmatrix} ct_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}}$ et $\boxed{E_0 \begin{pmatrix} ct'_0 = 0 \\ x'_0 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}}$

Evénement E_1 « passage de la fusée par la Mars» : $x_1 = L$ et $x'_1 = 0$

Donc $\begin{cases} ct_1 = \gamma(ct'_1 + \beta.0) \\ L = \gamma(\beta.ct'_1 + 0) \end{cases}$ ce qui donne $\boxed{E_1 \begin{pmatrix} ct_1 = L/\beta \\ x_1 = L \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}}$ et $\boxed{E_1 \begin{pmatrix} ct'_1 = L/\gamma\beta \\ x'_1 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}}$

2. En déduire la durée du trajet Δt pour un observateur terrestre et la durée du trajet $\Delta t'$ pour un observateur lié à la fusée. Comparer.

$$\boxed{\Delta t = t_1 - t_0 = \frac{L}{\beta c} = \frac{L}{v}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta t' = t'_1 - t'_0 = \frac{L}{\gamma\beta c} = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{v}}$$

3. Quelle-est alors la distance Terre-Mars L' calculée par un observateur lié à la fusée ? Comparer avec L.

Pour un observateur lié à la fusée, c'est Mars qui vient vers lui avec une vitesse v durant un temps $\Delta t'$, donc la distance parcourue est

$$\boxed{L' = v.\Delta t' = L/\gamma}$$

Quand la fusée se trouve à mi-chemin entre la Terre et Mars elle émet simultanément un signal lumineux en direction de la Terre et un autre signal lumineux vers Mars. Nous appelons les événements : E_2 « émission des signaux lumineux par la fusée » , E_3 « réception du signal sur Terre », E_4 « réception du signal sur Mars ».

4. Ecrire en fonction de β, γ et L les coordonnées des événements E_2, E_3, E_4 dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

E_2 « émission des signaux lumineux par la fusée» : $x_2 = L/2$ et $x_2' = 0$

Donc $\begin{cases} ct_2 = \gamma(ct_2' + \beta.0) \\ L/2 = \gamma(\beta.ct_2' + 0) \end{cases}$ ce qui donne $\boxed{E_2 \begin{pmatrix} ct_2 = L/2\beta \\ x_2 = L/2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}}$ et $\boxed{E_2 \begin{pmatrix} ct_2' = L/2\gamma\beta \\ x_2' = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}}$

E_3 « réception du signal sur Terre» : $x_3 = 0$

Puisque le rayon lumineux parcourt une distance $L/2$ (dans le référentiel Terrestre) avec une vitesse absolue c, donc

$c.(t_3 - t_2) = L/2 \Rightarrow ct_3 = ct_2 + L/2$ et donc $ct_3 = \frac{1+\beta}{2\beta} L$

En remplaçant dans la transformation de Lorentz

$\begin{cases} ct_3' = \gamma(ct_3 - \beta.x_3) \\ x_3' = \gamma(-\beta.ct_3 + x_3) \end{cases}$ d'où $\boxed{E_3 \begin{pmatrix} ct_3 = (1+\beta)L/2\beta \\ x_3 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}}$ et $\boxed{E_3 \begin{pmatrix} ct_3' = \gamma\,(1+\beta)L/2\beta \\ x_3' = -\gamma\,(1+\beta)L/2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}}$

E_4 « réception du signal sur Mars» : $x_4 = L$

Puisque le rayon lumineux parcourt une distance $L/2$ (dans le référentiel Terrestre) avec une vitesse absolue c, donc

$c.(t_4 - t_2) = L/2 \Rightarrow ct_4 = ct_2 + L/2$ et donc $ct_4 = \frac{1+\beta}{2\beta} L$

En remplaçant dans la transformation de Lorentz

$\begin{cases} ct_4' = \gamma(ct_4 - \beta.x_4) \\ x_4' = \gamma(-\beta.ct_4 + x_4) \end{cases}$ d'où $\boxed{E_4 \begin{pmatrix} ct_4 = (1+\beta)L/2\beta \\ x_4 = L \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}}$ et $\boxed{E_4 \begin{pmatrix} ct_4' = \gamma\,(1+\beta-2\beta^2)L/2\beta \\ x_4' = \gamma\,(1-\beta)L/2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}}$

5. Que peut-on dire sur la simultanéité des événements E_3 et E_4 ?

$t_3 = t_4$ Les deux événements sont simultanés pour un observateur lié à $\mathcal{R}$

$t_3' \neq t_4'$ Les deux événements ne sont pas simultanés pour un obs. lié à $\mathcal{R}'$

6. Calculer le carré des intervalles espace-temps s_{23}^2, s_{24}^2 puis s_{34}^2. Commenter.

$s_{23}^2 = (ct_3 - ct_2)^2 - (x_3 - x_2)^2 = \left(\frac{1+\beta}{2\beta} L - \frac{1}{2\beta} L\right)^2 - \left(0 - \frac{1}{2} L\right)^2 = 0$ Genre lumière

$s_{24}^2 = (ct_4 - ct_2)^2 - (x_4 - x_2)^2 = \left(\frac{1+\beta}{2\beta} L - \frac{1}{2\beta} L\right)^2 - \left(L - \frac{1}{2} L\right)^2 = 0$ Genre lumière

$s_{34}^2 = (ct_4 - ct_3)^2 - (x_4 - x_3)^2 = \left(\frac{1+\beta}{2\beta} L - \frac{1+\beta}{2\beta} L\right)^2 - (L - 0)^2 = -L^2$ Genre espace

s_{34}^2 est du genre espace car les événements concernent pas le même photon

Applications numériques : $v = 1{,}8 \times 10^8\ m/s$; $L = 78 \times 10^6\ km$; $\boldsymbol{\beta = 0{,}6}$; $\boldsymbol{\gamma = 1{,}25}$

$\Delta t = 433{,}33\ s = 7{,}22\ min$	$\Delta t' = 346{,}67\ s = 5{,}78\ min$	$L' = 62{,}4 \times 10^6\ km$	$s_{34}^2 = -6{,}084 \times 10^{15}\ km^2$