Analyse numerique:

I/ Rappels : Les matrices:

1. Définition:

Une matrice $n \times m$ est un tableau de nombres à n lignes et m colonnes. les nombres qui composent la matrice sont appelés les éléments de la matrice (ou aussi les coefficients). Une matrice à n lignes et m colonnes est dite matrice d'ordre (n,m) ou de dimension $n \times m$. L'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients réels se note $M_{n,m}(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1.m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \qquad A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$$

i : Indice des lignes

j : Indice des colonnes

* Si $n = m$ on dit que A est une matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

diagonal principale de A

diagonal secondaire.

* Si $A \in M_{\mathbb{R}}(n,m)$ on appelle matrice transposée de A la matrice notée

$^tA \in M_{\mathbb{R}}(m,n)$ définie par:

$$\boxed{{}^ta_{ij} = a_{ji}}$$

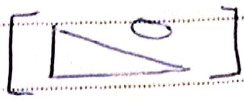
(la matrice transposée de A est la matrice $m \times n$ notée ^tA dont les lignes sont les colonnes de A et les colonnes sont les lignes de A.)

3/4

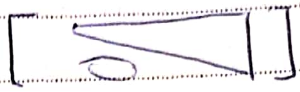
* Si $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$, on dit que A est symétrique si

$$\boxed{A = {}^tA} \iff \boxed{a_{ij} = a_{ji}}$$

* Si $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$, on dit que A est triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$

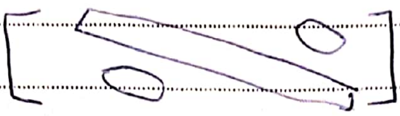


* Si $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$, on dit que A est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$



* Si $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$, on dit que A est diagonale si tous les éléments en dehors de la diagonale sont nuls

si $i \neq j \Leftrightarrow a_{ij} = 0$



une matrice qui est triangulaire inférieur et triangulaire supérieur est dite diagonale

* Exp

* $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 0 \end{bmatrix}$ matrice de 2 lignes et 3 colonnes $M_{\mathbb{R}}(2,3)$

${}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \in M_{\mathbb{R}}(3,2)$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 9 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrice carrée d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{R}$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrice diagonale

$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ ${}^tD = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ $D = {}^tD \rightarrow D$ symétrique

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrice Identité d'ordre 3

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$ triangulaire supérieure

$${}^tE = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$ triangulaire inférieure

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 5 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$ tridiagonale

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ matrice nulle

II Opérations pour les matrices:

1. Egalité des matrices:

$A, B \in M_{\mathbb{R}}(n,m)$ $\quad A = B \iff a_{ij} = b_{ij}$ pour $\begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m \end{cases}$

2- Addition:

$A, B \in M_{\mathbb{R}}(n,m)$ $\quad S = A + B \iff S \in M_{\mathbb{R}}(n,m)$

et $S_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

pour $\begin{cases} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{cases}$

3. Multiplication

$\lambda \in \mathbb{R}, A \in M_{\mathbb{R}}(n,m)$

$P = \lambda A \iff P \in M_{\mathbb{R}}(n,m)$ et $P_{ij} = \lambda a_{ij}$

pour $\begin{cases} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{cases}$

4/ Multiplication de deux matrices:

Soient $A \in M_{\mathbb{R}}(n,m)$, $B \in M_{\mathbb{R}}(m,p)$

$C = AB \iff C \in M_{\mathbb{R}}(n,p)$ et $C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$

$$i\begin{bmatrix} \text{———} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \end{bmatrix}^{j} = \begin{bmatrix} C_{ij} \end{bmatrix}$$

A B C

C_{ij} produit scalaire de la i^{eme} lignes de A et la j^{eme} colonnes de B.

Exp

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 1 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$$

* $A + B = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 11 \\ 5 & 5 & 9 \end{bmatrix}$

* $2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 10 & 12 & 14 \end{bmatrix}$

* $C = A \times D = \begin{bmatrix} 45 & 36 \\ 121 & 96 \end{bmatrix}$

2- Le determinant d'une matrice:

A toute matrice carrée A correspond une valeur appelée le determinant de A que l'on dénote par:

$$\det(A) \text{ ou bien } |A|$$

2.1 Calcule du déterminant pour une matrice 2X2:

Considerons la matrice A:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Le determinant de la matrice A est définie par:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

Exp

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = (1)(-2) - (5)(3) = -17$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 2 \times 2 - 4 \times 1 = 0$$

2.2 Définition d'un mineur

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Le mineur M_{12} est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la $1^{ère}$ rangée et la $2^{ème}$ colonne de A c'est-à-dire :

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 5.3 - 3.8 = -9$$

Le mineur $M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 2.3 - 8.4 = -26$

2.3 Définition d'un cofacteur :

Le cofacteur, C_{ij} d'une matrice A est défini par :

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

On le mineur $M_{12} = -9$
Le cofacteur $C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)(-9) = +9$

Le mineur $M_{22} = -26$
Le cofacteur $C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = +1(-26) = -26$

2.4 Pour une matrice 3x3 :

Soit : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ une matrice carrée

$$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}}$$

Le déterminant est obtenu en suivant une expansion par cofacteurs comme suit :

* Choisir une ligne ou une colonne de A (contenant le plus grand nombre de zéros)

* Multiplier chacun des éléments a_{ij} de la ligne (ou colonne) choisi par son cofacteurs, C_{ij}, correspondant.
* Faire la somme de ces résultats.

Alors: Si: $a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \longrightarrow C_{11}, \quad C_{12} \quad C_{13}$.

donc:

$$\det A = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13}$$

ou bien:

$$\det A = a_{21} C_{21} + a_{22} C_{22} + a_{23} C_{23}$$

$$\det A = a_{12} C_{12} + a_{22} C_{22} + a_{32} C_{32}$$

Exp

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2 \quad 1 \quad 3} \\ 1 \quad 0 \quad 2 \\ 2 \quad 0 \quad -2 \end{pmatrix} \quad a_{11} = 2, \; a_{12} = 1, \; a_{13} = 3$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1(0(-2) - (0)(2)) = 0$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -1 \left(1(-2) - (2)2\right) = 6$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = +1\left(1(0) - (2)0\right) = 0$$

$$\det A = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13} = 0 + 6 + 0 = 6$$

2.5 pour une matrice 4x4 et plus:

Soit A une matrice carrée et C_{ij} ses cofacteurs. Le déterminant est obtenu comme suit:

* Choisi un ligne ou un colonne de A contenant le plus grand nombre de zéros.
* Multiplier chacun des éléments a_{ij} de la ligne (ou colonne) choisi par son cofacteur, C_{ij}, correspondant.
* Faire la somme de ces résultats.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

* soit $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$ on dit que A est reversible : si $\det A \neq 0$
* On dit que A est non reversible : si $\det A = 0$
* Si $\det A \neq 0$ il existe $A^{-1} \in M_{\mathbb{R}}(n)$ tellque :

$$A^{-1}A = A\,A^{-1} = I$$

A^{-1} matrice inverse de A

$$\begin{cases} \det(AB) = \det(A) \times \det(B) \\ \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} \end{cases}$$

Calcule de A^{-1} (matrice inverse) :

a/ pour les matrices 2x2 :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det(A)} \, {}^t\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}}$$

$A^N = {}^tC$ matrice adjointe de A

donc : $\boxed{A^{-1} = \dfrac{(-1)^{i+j}}{\det(A)} \, {}^tC}$ $\qquad {}^tC = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = (1 \times 4) - (3 \times 2) = -2 \neq 0$ (A est reversible)

$$A^{-1} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det(A)} \, {}^tC = \frac{1}{4-6} \, {}^t\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \, {}^t\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b/ pour les matrices 3 X 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

$\det(A) \neq 0$ A est reversible

$$\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}$$ comatrice de A

sous matrice de A en superimant dans A la.

ou: M_{ij} est le determinant de la i eme ligne et j eme colonne.

La formule est alors:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det(A)}\, {}^t\text{Com}(A) \quad \text{si } \det(A) \neq 0}$$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ $\det(A) = 48 \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{48}\, {}^t\begin{pmatrix} -4 & -12 & 8 \\ 26 & 6 & -4 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{48}\begin{pmatrix} -4 & 26 & -3 \\ -12 & 6 & 3 \\ 8 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Les valeurs et les vecteurs propres:

I- Méthode directe:

I-1 Définition de polynôme caracteristique:

On appelle le polynôme caracteristique d'une matrice A le polynôme donné par:

$$\boxed{P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)}$$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 6 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 6 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-3-\lambda) - (6 \times 5)$$

$$= -6 - 2\lambda + 3\lambda + \lambda^2 - 30 = \lambda^2 + \lambda - 36$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 36$$

Exp2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

* Donner le polynôme caracteristique de A ?

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1-\lambda & 4 \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda(\lambda-2))$$

Les vecteurs et valeurs propres.

* Soit $A \in M_{\mathbb{C}}(n)$
- on dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A s'il existe une vecteur $X \in \mathbb{C}^n$ $\boxed{AX = \lambda X}$
- On dit que le vecteur $y \in \mathbb{C}^n$ est vecteur propre associé a la valeur propre. λ si $\boxed{Ay = \lambda y}$

Calcule des vecteurs propres:

- On appelle polynôme caracteristique de A le polynôme

$\boxed{P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)}$ I. matrice identité $d^p = n$.

- Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique P_A
- Les vecteurs propres associés à λ sont les solutions du système:

$$\boxed{(A - \lambda I)Y = 0_{\mathbb{R}^n}}$$

$$AX = \lambda X \iff (A - \lambda I)X = 0_{\mathbb{R}^n}, \quad X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$$

α: L'ensemble des vecteurs propres associé a λ noté E_λ est appelle: L'espace propre associé à λ.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

a/ $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix}$

$= (1-\lambda)(4-\lambda) - 0 \times 3 = 4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2$

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

donc $P_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 1$ ou $\lambda = 4$

b/ Vecteur propre associé à

$\lambda = 1$: $(A - \lambda_1 I)Y = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} 0y_1 + 0y_2 = 0 \\ 3y_1 + 3y_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = -y_2 \\ y_2 \text{ arbitraire} \end{cases}$ كيفي

Les valeurs propres associés à $\lambda_1 = 1$ suite $(-y_2, y_2)$ avec $y_2 \in \mathbb{R}$, $E_{\lambda_1} = \{(-y_2, y_2) / y_2 \in \mathbb{R}\} \in \mathbb{R}^2$

$* \lambda_2 = 4 \quad (A - \lambda_2 I)\, Y = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} -3y_1 + 0y_2 = 0 \\ 3y_1 + 0y_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 \text{ arbitraire} \end{cases}$

donc les vecteurs propres associés à $\lambda_2 = 4$ sont $(0, y_2) \cdot y_2 \in \mathbb{R}$

$E_{\lambda_2} = \{ (0, y_2) / y_2 \in \mathbb{R} \} \in \mathbb{R}^2$

* En pratique, cette démarche n'est pas exploitable pour les systèmes de taille supérieure à 4 ou 5 car le calcul formel de $\det(A - \lambda I)$ est rapidement monstrueux.

- En préfère donc les méthodes itératives dans lesquelles on s'approche pas à pas des valeurs propres.

- Dans ces cours :

  - Méthode de Jacobi : très lente et non pratique pour des problèmes de taille supérieures à 10.

  - Méthode de puissance itéré : La plus simple, mais aussi très limitée.

  - Algorithme QR : la méthode de référence pour des problèmes de taille inférieures à quelques milliers.

1/ La méthode de Jacobi

Soit une matrice carrée symétrique A d'ordre n dont on cherche à déterminer les valeurs propres. La méthode consiste en des transformations successives du type ${}^tTAT$ qui amènent la matrice A sous la forme diagonale. Comme les transformation de ce type ne modifient pas les valeurs propres, ces dernières se trouvent, en fin de calcul, sur la diagonale de la matrice transformée. De plus, il est possible de calculer aussi les vecteurs propres Y_i, $i = 1, \dots, n$ de A en multipliant les vecteurs propres ε_i de la matrice finale, qui ne sont autres que les colonnes de la matrice identité, par le produit $T_1 T_2 \dots T_K$ des matrices de transformations successives, soit :

$$Y_i = T_1 T_2 \dots T_K \varepsilon_i \qquad i = 1, \dots, n.$$

Dans la méthode de Jacobi, la matrice T est du type :

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} & (p)^{\text{ème}}\ \text{colonne} & & (q)^{\text{ème}}\ \text{colonne} & \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{array} \\
\begin{array}{cl}
\begin{bmatrix}
1 & \dots & 0 \dots 0 & \dots 0 \dots & 0 & \dots & 0 \\
- & - & - & - & - & - & - \\
0 & \dots & \cos\varphi \dots 0 & \dots 0 \dots & \sin\varphi & \dots & 0 \\
- & - & - & - & - & - & - \\
0 & \dots & \sin\varphi \dots 0 & \dots 0 & -\cos\varphi & \dots & 0 \\
- & - & - & - & - & - & - \\
0 & \dots & 0 \dots 0 & \dots 0 \dots & 0 & \dots & 1
\end{bmatrix} &
\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow (p)^{\text{ème}}\ \text{ligne} \\ \\ \leftarrow (q)^{\text{ème}}\ \text{ligne} \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
\end{array}$$

qui est égale à la matrice unité de même ordre que la matrice A à l'exception des éléments t_{pp}, t_{qq}, t_{pq} et t_{qp}. p et q sont tels que l'élément a_{pq} soit plus grand élément extra-diagonal et où φ est tel que : $\operatorname{tg}(2\varphi) = \dfrac{2a_{pq}}{a_{pp} - a_{qq}}$

2/ La méthode de la puissance itérée :

Soit A une matrice d'ordre n, λ_i ses valeurs propres et Y_i ses vecteurs propres $(i = 1, \dots, n)$.

Si les Y_i sont linéarement indépendants, un vecteur arbitraire V_1 peut être dévloppé suivant les Y_i :

$$V_1 = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \dots + a_n Y_n . \qquad (1)$$

Si on multiplie m fois l'expression (1) par la matrice A, on obtient, compte tenu du fait que : $A Y_i = \lambda_i Y_i$

$$A^m V_1 = a_1 \lambda_1^m Y_1 + a_2 \lambda_2^m Y_2 + \dots + a_n \lambda_n^m Y_n \qquad (2)$$

Si les λ_i sont réel et si $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$, on a, lorsque $m \to \infty$:

$$A^m V_1 \longrightarrow a_1 \lambda_1^m Y_1$$

Si on pose : $V_{m+1} = A^m V_1 \quad \text{---} (3)$

on voit que l'on a, d'après (3) : $\lambda_1 = \lim\limits_{m \to \infty} \left(\dfrac{V_{m+1}}{V_m} \right)$

le rapport $\dfrac{V_{m+1}}{V_m}$ pouvent être déterminer avec l'une quelconque des composantes de V_{m+1} et la composante V_m.

On voit aussi d'apres (3), que V_{m+1} converge vers les vecteur propre Y_1 à un coefficient $a_1 \lambda_1^m$ prés (mais les vecteurs propres sont toujours définis à un coefficient prés)

$$\lim_{m \to \infty} V_{m+1} = Y_1$$

En pratique, on se donne un vecteur initial V_1 et on calcule les V_K à l'aide de la relation $V_{K+1} = A V_K$.

De plus, on préfère ramener à 1 la valeur de l'une des composantes de ces vecteurs (par exemple la premiere). La composante correspondante du vecteur itéré suivant donne le rapport à la valeur précédente, et tend donc vers la valeur propre de plus grand module.

pour déterminer les valeurs propres suivantes, on opère une déflation, On détermine alors la matrice :

$$A_1 = A - \lambda_1 \frac{Y_1 \, {}^t V_1}{{}^t V_1 \, Y_1}$$

où le vecteur V_1 est le vecteur propre de la matrice transposée transposée de A, correspondant à la valeur propre λ_1.

3/ La méthode de Krylov :

Soit une matrice carrée A d'ordre n dont on cherche à déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres. Dans la méthode de Krylov, les coefficients du polynôme caractéristique sont calculés en utilisant le théorème d'Hamilton-Cayley selon lequel toute matrice A annule son polynôme caractéristique :

$$P_n(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \cdots + a_{n-1} A + a_n = 0$$

et donc :
$$A^n = \sum_{k=1}^{n} a_k A^{n-k}$$

Si : y^0 est une vecteur quelconque, non nul, on considère la suite des vecteurs :
$$y^{(1)} = A\, y^{(0)}, \quad y^{(2)} = A\, y^{(1)} = A^2 y^{(0)}, \ldots, y^{(n-1)} = A\, y^{(n-2)} = A^{n-1} y^{(0)}$$

On voit que :
$$y^{(n)} = A^n y^{(0)} = -\sum_{k=1}^{n} a_k A^{n-k} y^{(0)} = -\sum_{k=1}^{n} a_k y^{(n-k)}$$

En notant par :
$$y^{(0)} = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} \\ \cdots \\ y_n^{(0)} \end{pmatrix}, \quad y^{(1)} = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ \cdots \\ y_n^{(1)} \end{pmatrix}, \ldots, y^{(n)} = \begin{pmatrix} y_1^{(n)} \\ \cdots \\ y_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

les composantes des différentes vecteurs $y^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ du polynôme caractéristique $P_n(x)$ sont solution du système linéaire

$$\begin{bmatrix} y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-2)} & \cdots & y_1^{(0)} \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_2^{(0)} \\ - & - & - & - \\ y_n^{(n-1)} & y_n^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ -- \\ a_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} y_1^{(n)} \\ y_2^{(n)} \\ -- \\ y_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

Une fois, les valeurs propres λ_i. $i = 1, 2, \ldots, n$ déterminées et si l'on suppose celles-ci distinctes, les vecteurs propres sont donnés par :

$$V_i = \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k} Y^{(k)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

où le b_j sont les Coefficients du polynôme :

$$\frac{P_n(\lambda)}{\lambda - \lambda_i} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k} x^k$$