# Résolution numérique des systèmes linéaires

## 1/ Ecriture matricielle d'un système linéaire :

On considère le système d'équations linéaires suivantes :

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + x_{1m} x_m = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + x_{2m} x_m = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nm} x_m = b_n \end{cases}$$

Le système à n équation et m inconnue.

$$(S) \Leftrightarrow Ax = B \quad \text{où}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

On appelle :

A : Matrice associée du système (S)

B : Second membre du système (S)

$x$ : Vecteur inconnue.

- Si A est une matrice carrée $(m=n)$ on dit que le syst (S) est carrée
- Si $B = 0_{\mathbb{R}^n}$ on dit que (S) est homogène
- Si $m=n$ et $\det(A) \neq 0$ dit que le syst (S) est Cramer.

$\Rightarrow$ le syst Alors admet une seule solution donnée par les formules de Cramer :

$$x_i = \frac{\det(A^i)}{\det(A)} \qquad i = 1, 2, 3, \dots n.$$

Où $A^i$ est la matrice A dans laquelle on a remplacé la $i^{ème}$ colonne par le second membre B

Exemple : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\det A_1}{\det A} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{-2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{\det A_2}{\det A} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{-2} = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Autre forme de la solution du syst de Cramer

$AX = B$. $\quad A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow A^{-1}A\,x = A^{-1}B$

$\Leftrightarrow IX = A^{-1}B$

$$\boxed{AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B}$$

## 2/ Méthode de Gauss :

**Définition :**

La méthode de Gauss consiste à éliminer tous les termes éléments en dessous de la diagonale d'une matrice augmentée.

Matrice augmentée : est une matrice dont on fait ajouter les éléments de la matrice B à droite de la matrice A

$$[A]\,x = [B] \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

la matrice augmentée de A s'écrit

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

la méthode de Gauss consiste à mettre $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$

Exemple : $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases}$

Solution :

Il faut écrire sous la forme : $[A]x = [B]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 11 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$ est la matrice augmentée de A

donc on commence la méthode de Gauss.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 11 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & -7 & -3 & 11 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ 4L_3 - 7L_2 \end{array} \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 30 & 30 \end{array}\right]$$ Alors : $\begin{cases} 30x_3 = 30 \\ -4x_2 - 6x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_1 = 3 \end{cases} \qquad \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 3/ Méthode de Gauss Jordan

**Définition :** La méthode de Gauss Jordan est une correction de celle de Gauss, elle consiste à convertir la matrice A en une matrice unité et ainsi la solution est obtenue directement à partir de la diagonale.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Exemple :** Résoudre le système d'équation suivante :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -10 \end{cases}$$

**Solution :**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & -2 & -10 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 = L_2 - 3L_1 \\ L_3 = L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right] L_2 = L_2/5 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 = L_1 + L_2 \\ L_3 = L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] L_3/-7 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 = L_1 - L_3 \\ L_2 = L_2 + L_3 \end{array}$$

donc : $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

## A/ Méthode de Cholesky

**Définition :** Cette méthode consiste à décomposer la matrice A en un produit de deux matrice c-à-d :

$$[A] = [L]\,[M]$$

$[L]$ : Une matrice triangulaire inférieure avec tous les éléments $L_{11} = L_{22} = L_{33} = 1$

$[M]$ : Une matrice triangulaire supérieure c-à-d : Soit $A = (3\times3)$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{11} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{23} \\ 0 & M_{22} & M_{23} \\ 0 & 0 & M_{33} \end{bmatrix}$$

Et ainsi on trouve les éléments $(L_{ij})$ et $(M_{ij})$

La solution : Résoudre $[A]\,x = [B]$ revient à résoudre $[L]\,[M] = [B]$

pour trouver $(x)$ on passe par deux étapes :

$[L](Y) = [B] \Rightarrow$ trouver $[Y]$.

$[M](x) = [Y] \Rightarrow$ trouver $[X]$.

**Exemple :** Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3 = 0 \end{cases}$$

**Solution :**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

On faire la décomposition de A sous la forme :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ 0 & M_{22} & M_{23} \\ 0 & 0 & M_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

On a trouvé :

$$\begin{cases} M_{11} = 1,\ M_{12} = 2,\ M_{13} = 1 \\ L_{21} M_{11} = 2 \Rightarrow L_{21} = 2 \\ L_{21} M_{12} + M_{22} = 1 \Rightarrow M_{22} = -3 \\ L_{21} M_{13} + M_{23} = 3 \Rightarrow M_{23} = 1 \\ L_{31} M_{11} = 1 \Rightarrow L_{31} = 1 \\ L_{31} M_{12} + L_{32} M_{23} + M_{33} = 4 \Rightarrow M_{33} = 3 \end{cases}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Au lieu de résoudre $[A]X = [B]$

* $[L][Y] = [B] \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Y_1 = 1 \\ Y_2 = -4 \\ Y_3 = -4 \end{cases}$

* $[M][X] = (Y) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -1,333 \\ x_2 = 1,777 \\ x_1 = -1,221 \end{cases}$

## Méthode Itératives pour la solution de sys d'équation linéaires:

### a) la Méthode de Jacobi

Cette méthode consiste à résoudre un système d'équation linéaires de (n) équation avec (n) inconnue.

Soit le système suivant:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

**Procédure:** on fait sortir les $x_i$ ($i = 1$ à $n$) des équations correspondantes, tel que:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n)\right]$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n)\right]$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1})\right]$$

D'ou le système d'équation peut se mettre sous la formule générale suivante:

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1, i \neq j}^{n} a_{ij}\, x_j^{k}\right]$$

Initialisation: (itération zéro. $k=0$)

Pour $k=0$ $x_i^{(0)} = 0$ $(x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \cdots = x_n^{(0)} = 0)$

## Calcul itératif

| Itération k = | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | x | x | x | x |
| 2 | x | x | x | x |
| 3 | x | x | x | x |
| 4 | x | x | x | x |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

**Condition d'arrêt :** On ne s'arrête que si :

$i = 1$ à $n$, $|x_i^{k+1} - x_i^k| < \varepsilon$ $\quad \varepsilon$ = donné.

**Exemple :** Résoudre le système suivants par la méthode de Jacobi avec $\varepsilon = 0,001$.

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 = 12 \end{cases}$$

**Solution :**

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{8}(8 - x_2 + x_3) \\ x_2 = \frac{1}{7}(4 + x_1 + 2x_3) \\ x_3 = \frac{1}{9}(12 - 2x_1 - x_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = 1 - 0,125\, x_2^k + 0,125\, x_3^k \\ x_2^{k+1} = 0,571 + 0,142\, x_1^k + 0,285\, x_3^k \\ x_3^{k+1} = 1,333 - 0,222\, x_1^k + 0,111\, x_2^k \end{cases}$$

pour $k = 1$ $\quad x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = x_3^{(1)} = 0$

pour $k = 2$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1 - 0,125 \times 0 + 0,125 \times 0 = 1 \\ x_2^{(2)} = 0,571 - 0,142\,(0) + 0,285\,(0) = 0,571 \\ x_3^{(2)} = 1,333 - 0,222\,(0) + 0,111\,(0) = 1,333 \end{cases}$$

7

| Itération k | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0,571 | 1,333 |
| 2 | 1,095 | 1,095 | 1,048 |
| 3 | 0,955 | 1,026 | 0,969 |
| 4 | 0,993 | 0,990 | 1 |
| 5 | 1,002 | 0,998 | 1,004 |
| 6 | 1,001 | 1,001 | 1,001 |

$X_1^{(6)} = X_2^{(6)} = X_3^{(6)} = 1,001 \simeq 1$ valeur exacte

## b/ La Méthode de Gauss-Seidel :

**Définition :** la méthode de Gauss-Seidel est une modification de la méthode de Jacobi.

$K = 0. \quad x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \dots = x_3^{(0)} = 0$

$K = 1$

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = 1 - 3x_2^k + x_3^k \\ x_2^{k+1} = 2 + 3x_1^{k+1} - x_3^k \\ x_3^{k+1} = 5 - x_2^{k+1} + x_1^{k+1} \end{cases}$$

* Elle consiste à injecter toutes les nouvelles valeurs $x_i^{k+1}$ trouvées dans la même itération.

* C.a.d chaque nouvelle valeur $x_i^{k+1}$ trouvée dans la même itération écrase l'ancienne valeur $x_i^k$.

**Condition de convergence :**

On démontre que si A est une matrice à diagonale strictement dominante (condition suffisante), la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes c.à.d :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \qquad \forall i = \overline{1, n}$$

**Critère d'arrêt :** $|x^{(n)} - x^{(n-1)}| \leq \varepsilon$

**Exemple :** Résoudre le système d'équation linéaires suivants :

$\varepsilon = 0,005$

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = 1 - 0,125\, x_2^k + 0,125\, x_3^k \\ x_2^{k+1} = 0,571 + 0,142\, x_1^k + 0,285\, x_3^k \\ x_3^{k+1} = 1,333 - 0,222\, x_1^k + 0,111\, x_2^k \end{cases}$$

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$k=1$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0{,}571 + 0{,}142\,(1) + 0{,}285\,(0) \\ x_3 = 1{,}333 + 0{,}222\,(1) - 0{,}111\,(0{,}714) = 1{,}032 \end{cases}$

$k=2$ $\begin{cases} x_1 = 1 - 0{,}125\,(0{,}714) + 0{,}125\,(1{,}032) = 1{,}039 \\ x_2 = 0{,}571 + 0{,}142\,(1{,}039) + 0{,}285\,(1{,}032) = 1{,}012 \\ x_3 = 1{,}333 + 0{,}222\,(1{,}039) - 0{,}111\,(1{,}012) = 0{,}997 \end{cases}$

| k | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0,714 | 1,032 |
| 2 | 1,039 | 1,012 | 0,997 |
| 3 | 0,997 | 0,996 | 1,001 |
| 4 | 1,0006 | 0,9998 | 1,001 |
| [illegible] | | | |

Test d'arrêt : $\begin{cases} \lvert 1{,}0006 - 0{,}9971 \rvert = 0{,}0036 < \varepsilon \\ \lvert 0{,}9998 - 0{,}9961 \rvert = 0{,}0038 < \varepsilon \\ \lvert 1{,}001 - 1{,}001 \rvert = 0 < \varepsilon \end{cases}$