Solution de TD 1

Analyse Numérique

Exo 1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

1/ Polynome caractéristique de A : $\Rightarrow \det(A-\lambda I) = P(\lambda)$

On a : $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 4-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(A-\lambda) = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 4-\lambda \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left[-\lambda(4-\lambda) - (-1)(2)\right] - 0 + \left[(-1)(2) - (-1)(4-\lambda)\right]$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) + (2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3)$$

$$\boxed{\det(A-\lambda I) = (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3)}$$

2/ Les valeurs propres sont :

$$P(\lambda) = 0 \Rightarrow \det(A-\lambda I) = 0$$

$$(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3) = 0$$

donc $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$ sont des valeurs propres.

- Les vecteurs propres associé à des valeurs propres sont :

- pour $\lambda_2 = 2$:

$$(A-\lambda_1 I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & +1\\-1 & +2 & -1\\-1 & +2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z=0\\ -x+2y-z=0\\ -x+2y-2z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=0\\ x=2y\\ x=2y\end{cases}$$

$$\text{donc } V_1=\begin{pmatrix}2m\\m\\0\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

Pour: $\lambda_2=1$

$$(A-\lambda_2 I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 3 & -1\\-1 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+z=0\\ -x+3y-z=0\\ -x+2y-z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-z\\ y=0\end{cases}$$

$$\text{donc } V_2=\begin{pmatrix}-m\\0\\m\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_3=3$

$$(A-\lambda_3 I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\-1 & 1 & -1\\-1 & 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x+z=0\\ -x+y-z=0\\ -x+2y-3z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z\\ y=2z\end{cases}$$

$$\text{donc } V_3=\begin{pmatrix}m\\2m\\m\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

Alors $V_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $V_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $V_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

Exemple:

Exercice 2:

On considère la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs et vecteurs propres:

1/ par la méthode de Jacobi

2/ par la méthode de la puissance itérée.

Solution d'exercice:

1/ Méthode de Jacobi

le plus grand élément non diagonal de la matrice A étant l'élément a_{12}, l'angle φ sera tel que: $tg(2\varphi) = \frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$

Comme $a_{11}=a_{22}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, la matrice de transformation T_{12} s'écrit:

$$T_{12} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où:

$$A_1 = T_{12} A {}^tT_{12}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A_1, et par conséquent de A sont donc

$$X_1 = 3, \quad X_2 = X_3 = -1$$

Quand aux vecteurs propres, puisque le calcul s'est opéré en une seule étape, il sont donnés directement par les colonnes de la matrice T, on a donc :

$$V_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2/ Méthode de la puissance itéré :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

on se donc le vecteur : $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

à partir duquel on construit la suite de vecteurs $AY_1, A^2Y_1, \ldots,$ reportée dans le tableau ci-dessous.

λ		1	5	$5/13$	$13/41$	$41/121$	$121/365$	---	---
Y	$\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\2\\0\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\4/5\\0\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\14/13\\0\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\40/41\\0\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\122/121\\0\end{matrix}$	$\begin{matrix}1\\364/365\\0\end{matrix}$	---	---

les composantes des vecteurs de ce tableau ont été divisée par la première composante.

il est clair que la suite des vecteurs tend vers le vecteur

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et que la suite des valeurs de λ converge vers la valeur $\lambda_1 = 3$

$$V_1 = U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Construisons à présent la matrice A_1 qui est telle que :

$$A_1 = A - \lambda_1 \frac{U_1 \, {}^tV_1}{{}^tV_1 \, U_1}$$

Scanné avec CamScanner

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - 3 \, \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \; 1 \; 0)}{(1 \; 1 \; 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - 3 \, \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{2}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ +1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On se donne à nouveau un vecteur V_1: $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

et on procède de la même manière qu'avec la matrice A:

λ		$-1/2$	-1	-1	-1	---
V	$\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}$	---

On voit que cette suite de vecteurs converge vers le vecteur propre

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et que la valeur propre qui lui correspond est $\lambda_2 = -1$

On recommence le processus en définissant une matrice A_2, à partir de A_1, λ_2 et $V_2 = Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A_2 = A_1 - \lambda_2 \frac{Y_2 \, {}^tV_2}{{}^tV_2 \, Y_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

il est clair que la valeur propre de cette matrice est $\lambda_3 = -1$

et que le vecteur propre correspondant est: $Y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ex03 on considère la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Déterminer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice A par la méthode de puissance itérée ?