Corrigé de l'Épreuve de Rattrapage

EXERCICE 01 : ***(08 points)***

1. $\boxed{div(\vec{E})=\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$; $\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{E})=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$; $\boxed{div(\vec{B})=0}$; $\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{B})=\mu_0.\vec{j}+\mu_0.\varepsilon_0.\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$

2. $div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right)=0=\mu_0.div(\vec{j})+\mu_0.\varepsilon_0.\frac{\partial}{\partial t}div(\vec{E})$ et puisque $div(\vec{E})=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ alors :

$\mu_0.div(\vec{j})+\mu_0.\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{div(\vec{j})+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0}$ c.q.f.d.

3. En absence de charges ($\rho=0$) et de courants ($\vec{j}=\vec{0}$).

$\boxed{div(\vec{E})=0}$; $\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{E})=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$; $\boxed{div(\vec{B})=0}$; $\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{B})=\mu_0.\varepsilon_0.\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$

4. Calculons $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{E})\right)=-\frac{\partial\overrightarrow{rot}(\vec{B})}{\partial t}$ (car on peut inverser les dérivées).

D'autre part $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{E})\right)=\overrightarrow{grad}\left(div(\vec{E})\right)-\Delta\vec{E}=-\Delta\vec{E}$ ($div(\vec{E})=0$)

Et $\overrightarrow{rot}(\vec{B})=\mu_0.\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

D'où l'équation de propagation $\boxed{\Delta\vec{E}-\mu_0.\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0}}$

Calculons $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right)=\mu_0.\varepsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{rot}(\vec{E})}{\partial t}$ (car on peut inverser les dérivées).

D'autre part $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right)=\overrightarrow{grad}\left(div(\vec{B})\right)-\Delta\vec{B}=-\Delta\vec{B}$ ($div(\vec{B})=0$)

Et $\overrightarrow{rot}(\vec{E})=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

D'où l'équation de propagation $\boxed{\Delta\vec{B}-\mu_0.\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\vec{0}}$

5. $\boxed{\vec{E}=-\overrightarrow{grad}(V)-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$ et $\boxed{\vec{B}=\overrightarrow{rot}(\vec{A})}$

6. $\boxed{div(\vec{A})+\mu_0.\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}=0}$ avec $\vec{A}(\infty)=\vec{0}$ et $V(\infty)=0$

7. $div(\vec{E})=div\left(-\overrightarrow{grad}(V)-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad -\Delta V-\frac{\partial div(\vec{A})}{\partial t}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Or, d'après la jauge de LORENTZ $div(\vec{A})=-\mu_0.\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}$ donc $\boxed{\Delta V-\mu_0.\varepsilon_0\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+\frac{\rho}{\varepsilon_0}=0}$

$\overrightarrow{rot}(\vec{B})=\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right)=\overrightarrow{grad}\left(div(\vec{A})\right)-\Delta\vec{A}$ or, d'après la jauge de LORENTZ $div(\vec{A})=-\mu_0.\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}$

Donc $\overrightarrow{rot}(\vec{B})=\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right)=-\mu_0.\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{grad}(V)-\Delta\vec{A}$

D'autre part $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j} + \mu_0.\varepsilon_0.\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ et $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

D'où $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0.\vec{j} - \mu_0.\varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{grad}(V) - \mu_0.\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$

En comparant ces deux équations, il vient que $\boxed{\Delta\vec{A} - \mu_0.\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0.\vec{j} = \vec{0}}$

8. ($\rho = 0$) et ($\vec{j} = \vec{0}$) $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta V - \mu_0.\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0}$ et $\boxed{\Delta\vec{A} - \mu_0.\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0}}$

9. $\boxed{\mathcal{E}_{em} = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \dfrac{1}{2\mu_0}B^2}$ et $\boxed{\vec{P} = \dfrac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}}$

<u>EXERCICE 02 :</u> ***(06 points)***

$$\vec{E} = E_0.\cos(k.y + \omega.t)\vec{e}_x + E_0.\cos(k.y + \omega.t + \pi/2)\vec{e}_z$$

1. Onde plane se propageant suivant l'axe OY dans la direction des y décroissants, donc : $\boxed{\vec{n} = -\vec{e}_y}$

2. $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = 2.10^8\,Hz$; $\lambda = \dfrac{c}{\nu} = 1{,}5m$; $\vec{k} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\vec{n} = -\dfrac{4\pi}{3}\vec{e}_y$

3. Différence de phase $\boxed{\varphi = \varphi_x - \varphi_z = 0 - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2}}$ $\Rightarrow$ polarisation circulaire ($E_{0x} = E_{0z}$) droite.

4. $\vec{\mathscr{E}} = E_0 e^{i(k.y+\omega.t)}.\vec{e}_x + E_0 e^{i(k.y+\omega.t)}.e^{i(\pi/2)}.\vec{e}_z$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{\mathscr{E}} = E_0.(\vec{e}_x + i.\vec{e}_z)e^{i(k.y+\omega.t)}}$

5. $\vec{n} = -\vec{e}_y$ $\Rightarrow$ $\vec{B} = \dfrac{(-\vec{e}_y)\times\vec{E}}{c}$ donc :

$\boxed{\vec{B} = \dfrac{E_0}{c}.\cos(k.y + \omega.t)\vec{e}_z - \dfrac{E_0}{c}.\cos(k.y + \omega.t + \pi/2)\vec{e}_x}$ et $\boxed{\vec{\mathscr{B}} = \dfrac{E_0}{c}.(\vec{e}_z - i.\vec{e}_x)e^{i(k.y+\omega.t)}}$

6. $\vec{P} = \dfrac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$ pour une onde plane $\vec{P} = \dfrac{E^2}{\mu_0.c}\vec{n}$ ($B = \dfrac{E}{c}$)

Or $\vec{n} = -\vec{e}_y$ et $E^2 = E_0^2.\cos^2(k.y + \omega.t) + E_0^2.\sin^2(k.y + \omega.t) = E_0^2$ d'où $\boxed{\vec{P} = -\dfrac{E_0^2}{\mu_0.c}\vec{e}_y}$

Module du vecteur de POYNTING $P = \dfrac{E_0^2}{\mu_0.c} = Cte$ $\Rightarrow$ $\boxed{\langle P\rangle = \dfrac{E_0^2}{\mu_0.c}}$

7. $\iint \vec{P}\bullet d\vec{S} = \dfrac{\partial U_{em}}{\partial t}$ ($\vec{P}\perp d\vec{S}$ et $P = Cte$ sur S) $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial U_{em}}{\partial t} = \mathscr{P} = P.S$

$\boxed{\langle\mathscr{P}\rangle = \langle P\rangle.S = \dfrac{E_0^2.S}{\mu_0.c}}$ A.N : $\boxed{\langle\mathscr{P}\rangle = 20mW}$

EXERCICE 03 : ***(06 points)***

1. Dan le vide et en absence de charges ($\rho = 0$) et de courants ($\vec{j} = \vec{0}$).

$\boxed{div\left(\vec{E}\right)=0}$; $\boxed{\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right)=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$; $\boxed{div\left(\vec{B}\right)=0}$; $\boxed{\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)=\mu_0.\varepsilon_0.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$

Calculons $\quad \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right)\right)=-\frac{\partial \overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)}{\partial t}$ (car on peut inverser les dérivées).

D'autre part $\quad \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right)\right)=\overrightarrow{grad}\left(div\left(\vec{E}\right)\right)-\Delta\vec{E}=-\Delta\vec{E} \qquad (div\left(\vec{E}\right)=0)$

Et $\quad \overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)=\mu_0.\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

D'où l'équation de propagation $\quad \boxed{\Delta\vec{E}-\mu_0.\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0}}$

2.1. LAPLACIEN en coordonnées sphériques $\quad \Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r^2.tg\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta}+\frac{1}{r^2.\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

Comme $E(r,t)$ ne dépend que de r et de t alors. $\quad \boxed{\Delta E(r,t)=\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial E}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r.E)}$

2.2. L'équation de propagation devient alors : $\quad \Delta E-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r.E)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=0$

Multiplions cette équation par r et posons $r.E(r,t) = F(r,t)$.

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r.E)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (r.E)}{\partial t^2}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 (F)}{\partial r^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (F)}{\partial t^2}=0$$

Les solutions de cette équation sont sous la forme de deux ondes progressives se propageant dans des directions opposées.

$$F(r,t)=f_1(r-c.t)+f_2(r+c.t)=r.E(r,t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{E(r,t)=\frac{1}{r}f_1(r-c.t)+\frac{1}{r}f_2(r+c.t)}$$

2.3. Dans le cas d'une onde sphérique, l'expression du vecteur de POYNTING pour une telle onde est donnée sous la forme

$\vec{P}=\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}=\frac{E^2}{\mu_0.c}\vec{e}_r \qquad (B=\frac{E}{c}) \quad$ et son module est $\quad P=\frac{E^2}{\mu_0.c}$

Or le module du vecteur de POYNTING représente la densité de puissance rayonnée par unité de surface, d'où, pour une sphère de rayon r, on a :

$$\mathscr{P}=P.S=\frac{E^2}{\mu_0.c}.4\pi.r^2$$

Donc si le module de E était constant la puissance de l'onde augmenterait au fur et à mesure que cette onde ce propage (r augmente) ce qui est impossible. Pour que cette puissance reste constante, il faut alors que le module du champ soit proportionnel à $(1/r)$

$$\mathscr{P}=P.S=\frac{E^2}{\mu_0.c}.4\pi.r^2=Cte \quad \Rightarrow \quad E\propto\frac{1}{r}$$