

Corrigé de l'Épreuve de Rattrapage

EXERCICE 01 : (08 points)

$$1. \quad \boxed{\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}} ; \quad \boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} ; \quad \boxed{\operatorname{div}(\vec{B}) = 0} ; \quad \boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \vec{j} + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

$$2. \quad \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B})) = 0 = \mu_0 \cdot \operatorname{div}(\vec{j}) + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}(\vec{E}) \quad \text{et puisque} \quad \operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{alors :}$$

$$\mu_0 \cdot \operatorname{div}(\vec{j}) + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \quad \text{c.q.f.d.}$$

3. En absence de charges ($\rho = 0$) et de courants ($\vec{j} = \vec{0}$).

$$\boxed{\operatorname{div}(\vec{E}) = 0} ; \quad \boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} ; \quad \boxed{\operatorname{div}(\vec{B}) = 0} ; \quad \boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

$$4. \quad \text{Calculons} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E})) = -\frac{\partial \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B})}{\partial t} \quad (\text{car on peut inverser les dérivées}).$$

$$\text{D'autre part} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E})) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} \quad (\operatorname{div}(\vec{E}) = 0)$$

$$\text{Et} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{D'où l'équation de propagation} \quad \boxed{\Delta \vec{E} - \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

$$\text{Calculons} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B})) = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E})}{\partial t} \quad (\text{car on peut inverser les dérivées}).$$

$$\text{D'autre part} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B})) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}(\vec{B})) - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B} \quad (\operatorname{div}(\vec{B}) = 0)$$

$$\text{Et} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{D'où l'équation de propagation} \quad \boxed{\Delta \vec{B} - \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

$$5. \quad \boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{A})}$$

$$6. \quad \boxed{\operatorname{div}(\vec{A}) + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial V}{\partial t} = 0} \quad \text{avec} \quad \vec{A}(\infty) = \vec{0} \quad \text{et} \quad V(\infty) = 0$$

$$7. \quad \operatorname{div}(\vec{E}) = \operatorname{div}\left(-\overrightarrow{\operatorname{grad}}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad -\Delta V - \frac{\partial \operatorname{div}(\vec{A})}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{Or, d'après la jauge de LORENTZ} \quad \operatorname{div}(\vec{A}) = -\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial V}{\partial t} \quad \text{donc} \quad \boxed{\Delta V - \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B}) = \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{A})) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}(\vec{A})) - \Delta \vec{A} \quad \text{or, d'après la jauge de LORENTZ} \quad \operatorname{div}(\vec{A}) = -\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\text{Donc} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B}) = \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{A})) = -\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(V) - \Delta \vec{A}$$

D'autre part $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \vec{j} + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ et $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

D'où $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \vec{j} - \mu_0 \cdot \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{grad}}(V) - \mu_0 \cdot \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$

En comparant ces deux équations, il vient que $\Delta \vec{A} - \mu_0 \cdot \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \cdot \vec{j} = \vec{0}$

8. $(\rho = 0)$ et $(\vec{j} = \vec{0}) \Rightarrow \Delta V - \mu_0 \cdot \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$ et $\Delta \vec{A} - \mu_0 \cdot \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0}$

9. $\mathcal{E}_{em} = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$ et $\vec{P} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$

EXERCICE 02 : (06 points)

$$\vec{E} = E_0 \cdot \cos(k \cdot y + \omega t) \vec{e}_x + E_0 \cdot \cos(k \cdot y + \omega t + \pi/2) \vec{e}_z$$

1. Onde plane se propageant suivant l'axe OY dans la direction des y décroissants, donc :

$$\vec{n} = -\vec{e}_y$$

2. $v = \frac{\omega}{2\pi} = 2.10^8 \text{ Hz}$; $\lambda = \frac{c}{v} = 1,5m$; $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} = -\frac{4\pi}{3} \vec{e}_y$

3. Différence de phase $\varphi = \varphi_x - \varphi_z = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ polarisation circulaire ($E_{0x} = E_{0z}$) droite.

4. $\vec{\mathcal{E}} = E_0 e^{i(k \cdot y + \omega t)} \vec{e}_x + E_0 e^{i(k \cdot y + \omega t)} \cdot e^{i(\pi/2)} \vec{e}_z \Rightarrow \vec{\mathcal{E}} = E_0 \cdot (\vec{e}_x + i \vec{e}_z) e^{i(k \cdot y + \omega t)}$

5. $\vec{n} = -\vec{e}_y \Rightarrow \vec{B} = \frac{(-\vec{e}_y) \times \vec{E}}{c}$ donc :

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cdot \cos(k \cdot y + \omega t) \vec{e}_z - \frac{E_0}{c} \cdot \cos(k \cdot y + \omega t + \pi/2) \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{B}} = \frac{E_0}{c} \cdot (\vec{e}_z - i \vec{e}_x) e^{i(k \cdot y + \omega t)}$$

6. $\vec{P} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$ pour une onde plane $\vec{P} = \frac{E^2}{\mu_0 \cdot c} \vec{n}$ ($B = \frac{E}{c}$)

Or $\vec{n} = -\vec{e}_y$ et $E^2 = E_0^2 \cdot \cos^2(k \cdot y + \omega t) + E_0^2 \cdot \sin^2(k \cdot y + \omega t) = E_0^2$ d'où $\vec{P} = -\frac{E_0^2}{\mu_0 \cdot c} \vec{e}_y$

Module du vecteur de POYNTING $P = \frac{E_0^2}{\mu_0 \cdot c} = Cte \Rightarrow \langle P \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 \cdot c}$

7. $\iint \vec{P} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial U_{em}}{\partial t}$ ($\vec{P} \perp d\vec{S}$ et $P = Cte$ sur S) $\Rightarrow \frac{\partial U_{em}}{\partial t} = \mathcal{P} = P \cdot S$

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \langle P \rangle \cdot S = \frac{E_0^2 \cdot S}{\mu_0 \cdot c} \quad \text{A.N :} \quad \langle \mathcal{P} \rangle = 20mW$$

EXERCICE 03 : (06 points)

1. Dans le vide et en absence de charges ($\rho = 0$) et de courants ($\vec{j} = \vec{0}$).

$$\boxed{\text{div}(\vec{E}) = 0} ; \boxed{\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} ; \boxed{\text{div}(\vec{B}) = 0} ; \boxed{\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Calculons $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = -\frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})}{\partial t}$ (car on peut inverser les dérivées).

D'autre part $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$ ($\text{div}(\vec{E}) = 0$)

Et $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

D'où l'équation de propagation
$$\boxed{\Delta \vec{E} - \mu_0 \cdot \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

2.1. LAPLACIEN en coordonnées sphériques $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \cdot \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

Comme $E(r,t)$ ne dépend que de r et de t alors.
$$\boxed{\Delta E(r,t) = \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial E}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \cdot E)}$$

2.2. L'équation de propagation devient alors : $\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \cdot E) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$

Multiplions cette équation par r et posons $r \cdot E(r,t) = F(r,t)$.

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \cdot E) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (r \cdot E)}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 (F)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (F)}{\partial t^2} = 0$$

Les solutions de cette équation sont sous la forme de deux ondes progressives se propageant dans des directions opposées.

$$F(r,t) = f_1(r - ct) + f_2(r + ct) = r \cdot E(r,t) \Rightarrow \boxed{E(r,t) = \frac{1}{r} f_1(r - ct) + \frac{1}{r} f_2(r + ct)}$$

2.3. Dans le cas d'une onde sphérique, l'expression du vecteur de POYNTING pour une telle onde est donnée sous la forme

$$\vec{P} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 \cdot c} \vec{e}_r \quad (B = \frac{E}{c}) \quad \text{et son module est} \quad P = \frac{E^2}{\mu_0 \cdot c}$$

Or le module du vecteur de POYNTING représente la densité de puissance rayonnée par unité de surface, d'où, pour une sphère de rayon r , on a :

$$\mathcal{P} = P \cdot S = \frac{E^2}{\mu_0 \cdot c} \cdot 4\pi \cdot r^2$$

Donc si le module de E était constant la puissance de l'onde augmenterait au fur et à mesure que cette onde se propage (r augmente) ce qui est impossible. Pour que cette puissance reste constante, il faut alors que le module du champ soit proportionnel à $(1/r)$

$$\mathcal{P} = P \cdot S = \frac{E^2}{\mu_0 \cdot c} \cdot 4\pi \cdot r^2 = Cte \Rightarrow E \propto \frac{1}{r}$$